

棒齿接触分析的互补算法

沈阳航空工业学院

彭克俭 盛元生

北京航空航天大学

郑光华

【摘要】 本文根据变分不等方程理论论证了含摩擦弹性接触问题解的存在性和唯一性, 并使其等价于二次规划问题。接触体系各部分离散后凝聚到接触边界上形成出口刚度矩阵, 并根据接触面上法向位移的非穿透条件和摩擦律等条件, 导出非负变量 u, λ 的线性互补方程。直接采用二次规划的 Lemke 算法, 其求解规模仅限于接触边界。棒齿模型接触分析结果和实验结果吻合较好。

一、前 言

在工程实际中, 构件的受力大多是通过相互接触而施加的。接触问题是一类边界非线性问题^[1], 具有明显的局部性质, 其应力总是随着离开接触区距离的增大而迅速衰减。在经典弹性理论中, 沿着给定位移边界, 位移是一个已知函数, 约束是双边的。接触问题沿着接触体可能发生接触的边界, 向体内方向的位移是独立的, 相反方向则受到另一接触体的制约, 故约束是单边的。同时沿着接触边界, 接触力和接触尺寸都无法事先确定, 它们依赖于加载方式、载荷状态以及接触面物理性质等。接触问题的数值解法大致分为迭代法和规划法两类。迭代法的主要形式是“试探、误差、迭代”。首先假定接触状态, 然后在每个载荷增量步内不断迭代修正。理论上, 迭代法收敛是一无穷过程。并且如果接触状态在每步线性增量内不能适应结构的变化时, 常常会产生一种“漂移”现象, 随着增量步增加, 这种漂移的累积最终将导致一个错误解, 也就是说初始接触状态和增量步的选择有一定的经验性。

规划法是从变分原理出发, 将接触问题转回成力学原问题。以接触体系的势能泛函为目标函数, 在原有的约束方程中加入接触面上的非透条件和摩擦律, 形成互补问题, 用成熟的二次规划理论求解。规划法本质也是一种迭代, 但其收敛性已被二次规划理论证明。

二、接触问题的变分不等方程描述

设 V 是 R^3 的一个具有光滑边界 S 的区域, 且 $S = S_u + S_p + S_c$, 则:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$
$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}(u)$$
$$\epsilon_j(u) = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$$
$$u = 0$$
$$\sigma_{ij} n_j = P_i$$
$$P_n \leq 0, \quad |P_\tau| \leq -\mu P_n$$

在 V 内

在 S_u 上

在 S_p 上

在 S_c 上

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

其中 P_n 为 S_c 上的法向力, μ 为摩擦系数, 且若 $|P_\tau| < -\mu P_n$, 则 $u_\tau = 0$ 。若 $|P_\tau| = -\mu P_n$, 则

本文于 1990 年 4 月收到。

存在某 $k \geq 0$ 使得 $u\tau = -k \cdot P\tau$ 。以上 (1) ~ (6) 式构成弹性接触问题。

设 (u, σ) 是问题 (1) ~ (6) 的解, 另设 v 是 V 上的一个位移许可场, 且满足 $v|_{S_u} = 0$, 以 $(v_i - u_i)$ 对 (1) 式做加权积分, 经过分部积分得:

$$\int \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(v - u) dV = \int b_i \cdot (v_i - u_i) dV + \int \sigma_{ij} n_j \cdot (v_i - u_i) dS \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \int \sigma_{ij} n_j \cdot (v_i - u_i) dS &= \int_u \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) dS + \int_p P_i (v_i - u_i) dS + \int_c P_n (v_n - u_n) dS \\ &+ \int_c P\tau (v\tau - u\tau) dS \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{在 } S_u \text{ 上, } u_i = v_i = 0, \text{ 则 } \int_u \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) dS = 0 \quad (9)$$

在 S_c 上, 由于 $|P\tau| \leq -\mu P_n$ 时, 则

$$\int_c P\tau v\tau dS \geq \int_c -|P\tau| \cdot |v\tau| dS \geq \int_c \mu P_n \cdot |v\tau| dS \quad (10)$$

当 $|P\tau| < -\mu P_n$ 时, 则 $u\tau = 0$, 故

$$\int_c P\tau (-u\tau) dS = 0 \quad (11)$$

当 $|P\tau| = -\mu P_n$ 时, 则 $u\tau = -kP\tau$, $k \geq 0$, 故

$$\int_c P\tau (-u\tau) dS = \int_c -\mu P_n |u\tau| dS \quad (12)$$

综合 (10) ~ (12) 式可得:

$$\int_c P\tau (v\tau - u\tau) dS \geq \int_c \mu P_n (|v\tau| - |u\tau|) dS \quad (13)$$

$$\text{令: } a(u, v) = \int E_{ijkl} \epsilon_{kl}(u) \epsilon_{ij}(v) dV, \quad L(v) = \int b_i v_i dV + \int_p P v_i dS + \int_c P_n v_n dS$$

$$j(v) = \int_c -\mu P_n |v\tau| dS$$

将 (8)、(9)、(13) 式代入 (7) 式得:

$$\begin{aligned} a(u, v - u) + j(v) - j(u) &\geq L(v - u) \\ \forall v \in V, v|_{S_u} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

这样一个弹性接触问题就可以用变分不等式 (14) 严格地进行描述。根据泛函理论两个定理: 得知 (1) 设 a 是正定对称 (即 $a(u, u) \geq 0$) 时, $\forall u \in V$, 强制连续双线性, $\forall v \in V$, j 是连续凸泛函, 则存在唯一的 $u \in V$ 是变分不等式 (14), 的解含摩擦接触问题存在唯一的解。(2) 设 a 是正定对称时, $\forall u \in V$, 强制连续双线性, j 是连续凸泛函, $b \in V$, 则变分不等式 (14) 和下列变分问题等价: 求 $u \in V$ 使 $\{(1/2)a(u, u) + j(u) - (b, u)\} \rightarrow \min$, 其中 (b, u) 定义为内积。即含摩擦接触问题能够转化为一个弹性势能极小化问题求解。

三、接触问题规划求解的有限元格式

设 A 、 B 两物体接触, 在可能接触边界 S_c 上有相同的公共法线, 任一点的接触力可分解为法向和切向接触力 P_n 、 P_τ 。如图 1 所示, 规定以 A 物体的局部坐标 $\tau - n$ 为正方向。

库仑摩擦律为: $|P_\tau^A| \leq -\mu P_n^A$, $(P_\tau^A = -P_\tau^B)$ (15)

法向接触力不受拉条件: $P_n^A \leq 0$, $P_n^B = -P_n^A \geq 0$ (16)

法向不可穿透条件为^[2]: $u^n = u_n^B - u_n^A + g \geq 0$ (17)

其中 g 为给定间隙。引入一组变量 $u_k \geq 0$, 将 (15)、(16) 式写成统一的形式

$$v_k = v_k(P_\tau, P_n) \geq 0 \quad (18)$$

$v_k > 0$ ($k=1, 2, 3$), 表示切向接触力未达到临界摩擦力, 法向接触力 P_n^B 为正, 称之为无滑动连续接触状态。 $v_k = 0$ ($k=1, 2$), 表示物体发生接触滑动, 称为滑动接触状态。 $v_k = 0$ ($k=3$), 表示物体脱开, 称为广义滑动。

在局部坐标 $\tau-n$ 下, 并引入一组变量 $\lambda_k \geq 0$, 第 “ e ” 个可能接触点对的位移差可写为:

$$\{u^B\}^e = \begin{Bmatrix} u_\tau^B \\ u_n^B \end{Bmatrix}^e = H \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix}^e + \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix}^e \quad (19)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

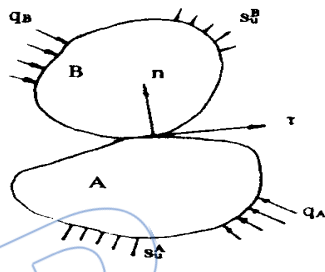


图1 两物体接触示意

比较 (18)、(19) 式有: $v_1 > 0$ 时, $\lambda_1 = 0$, 接触但不滑动; $v_1 = 0$ 时, $\lambda_1 > 0$, 正向滑动。 $v_2 > 0$ 时, $\lambda_2 = 0$, 接触但不滑动; $v_2 = 0$ 时, $\lambda_2 > 0$, 负向滑动。 $v_3 > 0$ 时, $\lambda_3 = 0$, 接触; $v_3 = 0$ 时, $\lambda_3 > 0$, 未接触。所以 $\{v^T\} \cdot \{\lambda\} = 0$ 构成互补条件。

对 A 、 B 两物体做有限元离散, 在可能接触的边界上形成 $2N$ 个对应节点, 并建立以局部坐标下可能接触点为出口的出口刚度矩阵, 其平衡方程为:

$$\begin{bmatrix} k_A & 0 \\ 0 & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_A + P_{BA} \\ P_B + P_{AB} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

k_A 、 k_B 、 P_A 、 P_B 为出口刚度阵和等效载荷, P_{BA} 和 P_{AB} 为 B 与 A 的作用力和反作用力。

引入变量 $u^B = u_B - u_A$ 为可能接触点对的位移差, 并令 I 表示单位矩阵, 得:

$$\begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u^B \end{Bmatrix} \quad (21)$$

(21) 代入 (20) 式得:

$$\begin{bmatrix} k_A & 0 \\ k_B & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_A + P_{BA} \\ P_B + P_{AB} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

上式凝聚到 B 物体的接触边界上: $P_{AB} - \bar{K}_{BU}^B = \bar{P}_B$ (23)

其中 $\bar{K}_B = k_B - k_B(k_A + k_B)^{-1}k_B$, $\bar{P}_B = P_B - k_B(k_A + k_B)^{-1}(P_A + P_B)$

将 (19) 式组集求和得:

$$u^B = \sum_{e=1}^N \{u^B\}^e = \text{diag}(H^1, \dots, H^e, \dots, H^N) \{\lambda^1, \dots, \lambda^e, \dots, \lambda^N\}^T + \{g^1, \dots, g^N\}^T$$

简写成: $u^B = H \cdot \lambda + g$ (24)

将 (18) 式写成矩阵形式并组集求和得:

$$v = \sum_{e=1}^N \{v\}^e = \text{diag}(L_1, \dots, L_e, \dots, L_N) \{P_{AB}\} \quad , \quad L_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \mu & \mu & 1 \end{bmatrix}^T$$

简写成:
$$v = L \cdot P_{AB} \quad (25)$$

合并 (23)、(24)、(25) 式, 整理得:

$$u - LK_B H \lambda = LP_B + LK_B g \quad (26)$$

同时有:
$$v^T \cdot \lambda = 0, \quad v, \lambda \geq 0 \quad (27)$$

上两式构成了摩擦接触问题的线性互补方程。可用二次规划的 Lemke 算法求解。

四、实例分析

算例 1. 两个圆柱体接触分析 (Hertz 问题), 如图 2 所示。 $R_A = R_B = 1\text{mm}$, $P = 200\text{N/mm}$, $E = 206\text{GPa}$, 泊松比 $\nu = 0$, 无摩擦 $\mu = 0$, 对称取一半为计算域, 设有 6 对节点可能接触。

解析解: 接触面半长 $L/2 = 1.075 \sqrt{2PR_A R_B / E(R_A + R_B)}$
 $= 0.0335\text{mm}$

$$\text{接触压应力 } \sigma_{\max} = 0.59 \sqrt{PE(R_A + R_B) / 2R_A R_B}$$

$$= 3738\text{MPa}$$

本文解分别为 0.0314mm 和 3821MPa , 误差分别为 6.25% 和 0.9% 。

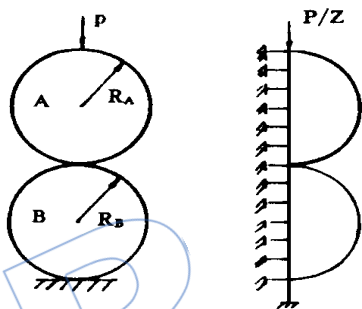


图 2 圆柱接触分析

算例 2. 某发动机棒齿聚碳酸酯实验模型接触分析。如图 3 所示。泊松比 $\nu = 0.384$, $E = 2350\text{MPa}$, $q_{\text{叶}} = 20.15\text{MPa}$, $q_{\text{盘}} = 3.47\text{MPa}$, 厚度 $t = 3\text{mm}$, 摩擦系数 $\mu = 0.23$, 设各齿间隙 $g = 0$, 每个齿面上有 5 对接触

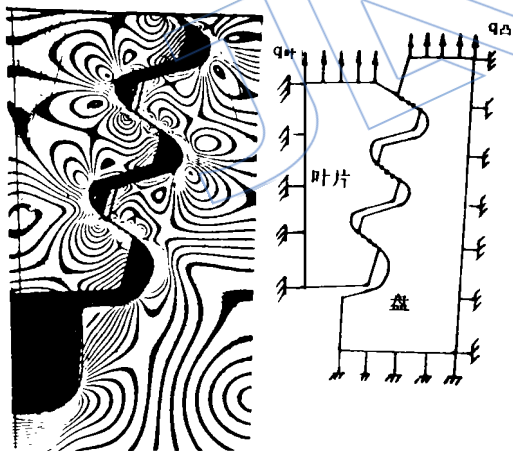


图 3 棒齿接触模型

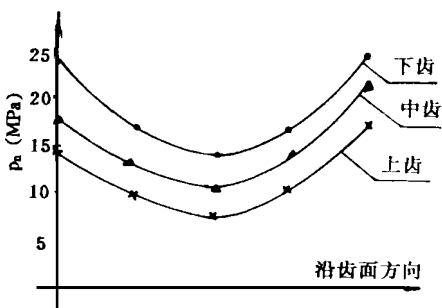


图 4 棒齿接触力齿面分布

节点。计算结果如图 4 所示。实验所得各齿载荷分配值^[3]与计算值分别为: 上齿 中齿 下齿 = $0.798 \quad 0.86 \quad 1$, 上齿 中齿 下齿 = $0.75 \quad 0.825 \quad 1$ 。

参 考 文 献

- [1] 彭克俭、盛元生、郑光华, “固体力学接触问题综述”, 沈阳航空工业学院学报, No. 1, 1989 年。
- [2] 钟万勰等, “参数二次规划法在计算力学中的应用”, 计算结构力学及其应用, Vol. 6, No. 1, 1989 年。
- [3] 彭克俭等, “光弹性接触实验数据处理的边界元法”, 全国第六届实验力学会议论文集, 1989 年 11 月。

A SUPPLEMENTARY ALGORITHM FOR LUG TOOTH CONTACT ANALYSIS

Pen Kejian and Sheng Yuansheng

(*Shenyang Institute of Aeronautical Engineering*)

Zheng Guanghua

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

According to the principles of the inequality variations, the existence and the uniqueness of the solution have been verified for elastic contact problems, which contain friction forces between the contact surfaces. Thus the contact problems are made to be equivalent to the quadratic programming problems. By using the basic idea of supplement, the objects of a contact system is discretized and then lumped to the contact boundaries, then a resultant stiffness matrix is formed and a linear supplementary equation of non-negative variables, $U \text{ and } \lambda$, is also derived in the light of the non-penetration condition of the normal displacements of the contact surfaces and the Coulumb friction law, etc. By the direct use of the Lemke algorithm of quadratic programming method, the scope of solution is limited to the contact boundaries. The whole field information is therefore obtained from further solution of the subelements. Such an algorithm enables to eliminate effectively the convergence instability which used to appear in the iteration methods in solving the problems. The results of calculations of the lug teeth contact stresses are fitted with the experimental data quite well.

DOUBLE COMPATIBLE MODE SYNTHESIS OF SYMMETRIC STRUCTURES WITH C_n GROUP

Wang Wenliang

(*Fudan University*)

Zhu Nongshi and Xu Jiahua

(*Shanghai Ship & Shipping Research Institute*)

ABSTRACT

The success of implementing the mode analysis in the structural integrity research depends to a large extent on the ability to extract normal modes of the structures. In this paper, a new technique is proposed to combine the group theory algorithm and double compatible substructure method for analyzing rotationally symmetric (C_n) structures. In this method, only one sector ($1/n$ part of a structure) is taken and considered so as to obtain the normal modes of the whole structure. But for a large complicated structure, this sector still contains a lot of degrees of freedom (DOF) and is not suitable for direct solution by finite element method. For this reason a substructure method—double compatible mode synthesis method is employed. This technique enhances the extraction efficiency with the accuracy ensured by considerable reduction of synthetic scale through elimination of interface DOF, a numerical example is given to illustrate the merits of the presented technique.