

导热温度分布的有限元素法分析及瞬态计算的递归公式

北京航空航天大学 朱谷君 冀守礼 杨帆

【摘要】 本文回顾了导热温度计算程序作为高性能发动机预研项目的进行情况和取得的成果，并简要地说明了三维稳态和瞬态温度计算程序的特点。文中结合所用的时间递归公式，介绍了瞬态温度计算的稳定性和振荡现象，从而说明采用可选择加权系数递归公式的必要性。最后给出了显示稳定性和振荡现象的计算实例。

一、概 述

导热温度分布的数值计算是针对发动机轴系、高温涡轮叶片等零部件的研制需要提出的。它包括轴对称与平面二维温场的稳态与瞬态计算和三维温场的稳态与瞬态计算。

本课题首先完成了轴对称及二维平面温场的有限元计算程序，并通过航空部的鉴定和获航空部六院科技二等奖。结合三维温场的有限元素法计算程序，并针对多隔框的复合冷却叶片结构提出了一种三维网格的自动生成程序。用该三维计算程序曾计算了某型复合冷却涡轮叶片的稳态温度分布和叶片前缘部分的瞬态温度分布^[1]。此外，上述计算程序也多次为其它单位进行了转子等另部件的温度计算，取得了满意的结果。特别是在某发动机事故分析中，用所研制的程序做了计算。航空航天部科技委在通报中指出：在事故分析中应用了高性能推进系统予研成果，进行了压气机转子温度场有限元计算。

二、计算程序的特点及递归格式

所编制的三维导热温度计算程序适用于稳态及瞬态情况，包括物性量、内热源随温度变化的计算；也包括导热率主轴与坐标轴一致时的各向异性材料的计算；已知温度或热流密度，或者已知换热系数和周围介质温度的边界条件情况；单元采用 20 节点立体等参元；瞬态计算中的时间递归公式可选择不同的加权系数；为了节省内存，采用了波前法求解。

瞬态温度场计算中涉及温度对时间的一阶导数，通过加权余数法推导两点递归公式时，为了使计算能适应各种时间格式的要求，采用了可自由选择加权系数 σ 的方案。我们知道，有限元分析所得的函数关系可归结为

$$[K]\{T\} + [N]\left\{\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right\} = \{F\}$$

(1)

取插值公式^[4]

$$\sigma\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right)_{i+\Delta t} + (1-\sigma)\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right)_i = (T_{i+\Delta t} - T_i)/\Delta t$$

(2)

从式 (1) 中导出的 $(\partial T/\partial \alpha)_{i+\Delta t}$ 和 $(\partial T/\partial \alpha)_i$ 代入式 (2)，可得出一般的递归公式

$$\left\{ \left[\frac{N}{\Delta t} \right] + \sigma [K] \right\} \{T\}_{t+\Delta t} = \sigma \{F\}_{t+\Delta t} + (1-\sigma) \{F\}_t + \left\{ \left[\frac{N}{\Delta t} \right] - (1-\sigma) [K] \right\} \{T\}_t \quad (3)$$

采用一般的两点递归公式 (3) 编制程序, 当选用不同的加权系数 σ 时, 就可获得不同的时间差分格式, 例如 $\sigma=0$ 是前差或显式格式; $\sigma=0.5$ 是中心差分或克朗克-尼科尔森 (Crank-Nicolson) 格式; $\sigma=2/3$ 是伽辽金 (Galerkin) 格式; $\sigma=1$ 是后差或全隐式格式。

为了讨论上述递归公式的稳定性和振荡现象, 需要考察温度系数间的关系, 并从中导出某种限制条件。为此, 写出当载荷项 f_i 为零时的温度关系^[2]

$$\left(\frac{n_i}{\Delta t} + \sigma k_i \right) (T_i)_{t+\Delta t} + \left(-\frac{n_i}{\Delta t} + (1-\sigma) k_i \right) (T_i)_t = 0 \quad (4)$$

若令 $(T_i)_{t+\Delta t} = \lambda (T_i)_t$, 则式 (4) 可改为

$$\lambda \left(\frac{n_i}{\Delta t} + \sigma k_i \right) + \left(-\frac{n_i}{\Delta t} + (1-\sigma) k_i \right) = 0$$

或者

$$\lambda = \frac{1 - (1-\sigma) k_i \Delta t / n_i}{1 + \sigma k_i \Delta t / n_i} \quad (5)$$

为保证获得稳定解, 要求 $|\lambda| < 1$, 即

$$1 - (1-\sigma) k_i \Delta t / n_i > -1 - \sigma k_i \Delta t / n_i$$

或者

$$-\frac{k_i}{n_i} \Delta t (1-2\sigma) < 2 \quad (6)$$

显然, $\sigma \geq 0.5$ 时是无条件满足该式的; 而 $0 < \sigma < 0.5$ 时, 获得稳定解的条件是

$$\frac{k_i}{n_i} \Delta t < \frac{2}{1-2\sigma} \quad (7)$$

应该指出, 尽管 $\sigma \geq 0.5$ 可无条件地趋于稳定解, 但是除了 $\sigma=1$ 以外, 随着 $k_i \Delta t / n_i$ 增大, λ 都有可能出现负值 [见式 (5)], 这意味着温度的计算值会有振荡, 而减小振荡的途径是减小 k_i / n_i 或 Δt 以及增大 σ 值 ($\sigma=0 \sim 1$)。

三、计算实例

图 1 是计算对象, 它包括四个单元共 51 个节点, 每个单元都是边长为 $5 \times 10^{-3} \text{ m}$ 的正方块, 材料的导温系数 $a = 0.42 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。 $x = 0.01 \text{ m}$ 的两个表面, $y = 0$ 的四个表面以及 $z = 0$ 的两个表面是给定换热系数 α 和周围介质温度 T_f 的边界面, 其它表面为绝热面。

图 2 是节点 5、26 和 47 的温度 $\theta = (T - T_f) / (T_o - T_f)$ 随时间的变化。8 个边界面的换热系数均为 $1.5 \times 10^3 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, 介质温度 $T_f = 1000$, 初温 $T_o = 20$, 时间步长 $\Delta t = 10^{-4} \text{ hr}$ 。图中表明, 加权系数 $\sigma=0$ 的计算是不稳定的; 对于节点 47; $\sigma=0.25$ 的计算也是不稳定的; 其它加权系数下的计算是稳定; 但 $\sigma=0.5$ 在起始时的振荡较大, 因而误差也较大。当振荡平复后, $\sigma=0.5$ 的计算误差最小, 这与中心差分格式具有较高阶 (二阶) 的截断误差相符。

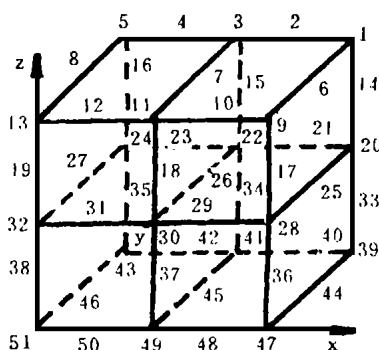


图 1 计算用矩形块

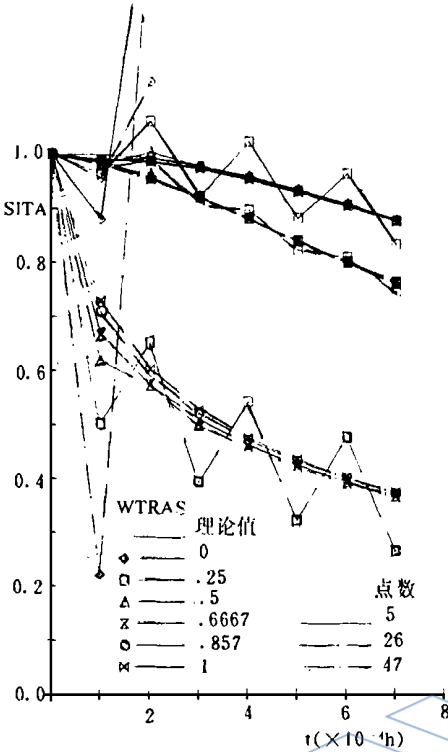


图 2 均匀换热系数下的计算结果

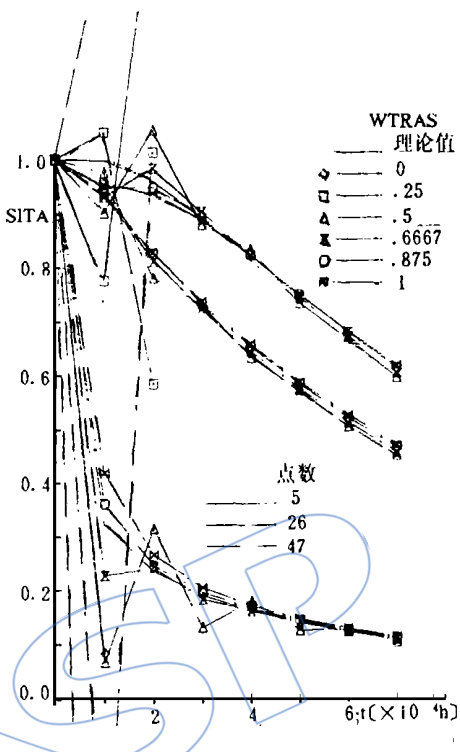


图 3 不均匀换热系数下的计算结果 (Δt= 0.36s)

表 1 换热系数不均匀时各节点的计算误差 $\left(\theta_{\text{计算}}/\theta_{\text{理论}}-1\right) \times 100\%$

($\alpha_{\infty}=0.01\text{m}=0.15\times10^3\text{W}/\left(\text{m}^2\cdot\right)$, $\alpha_{\infty}=1.5\times10^3\text{W}/\text{m}^2\cdot$, $\alpha_{\infty}=15\times10^3\text{W}/\left(\text{m}^2\cdot\right)$), $\Delta t=0.36\text{s}$)

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
节点 5	1/4	- 22.2 + 54.2 - 69.6 + 102.4											
	1/2	- 9.6	+ 9.7	- 1.3	+ 2.5	+ 0.3	+ 0.7	0	+ 0.2	0	0	0	0
	2/3	- 6.7	+ 2.4	+ 1.3	+ 1.3	+ 1.2	+ 1.3	+ 1.4	+ 1.6	+ 1.7	+ 1.9	+ 2.1	+ 2.3
	7/8	- 5.0	- 1.3	+ 0.4	+ 1.3	+ 1.8	+ 2.3	+ 2.8	+ 3.3	+ 3.7	+ 4.2	+ 4.7	+ 5.2
	1	- 4.5	- 2.4	- 0.4	+ 1.1	+ 2.1	+ 2.9	+ 3.6	+ 4.3	+ 4.9	+ 5.6	+ 6.3	+ 7.0
节点 26	1/4	+ 12.7 - 28.5 + 39.1 - 62.1 + 89.9 - 138.3											
	1/2	+ 4.6	- 4.5	+ 1.6	- 0.8	+ 0.8	0	+ 0.4	+ 0.1	+ 0.2	+ 0.1	+ 0.1	0
	2/3	+ 2.3	- 0.6	+ 0.7	+ 1.0	+ 1.4	+ 1.6	+ 1.9	+ 2.1	+ 2.4	+ 2.6	+ 2.8	+ 3.0
	7/8	+ 0.7	+ 1.1	+ 1.7	+ 2.3	+ 2.8	+ 3.3	+ 3.8	+ 4.3	+ 4.8	+ 5.2	+ 5.7	+ 6.2
	1	0	+ 1.6	+ 2.4	+ 3.0	+ 3.7	+ 4.3	+ 5.0	+ 5.6	+ 6.2	+ 6.9	+ 7.5	+ 8.2
节点 47	1/4	- 219.6+ 332.5- 580.4											
	1/2	- 79.3	+ 34.3	- 31.0	+ 11.4	- 10.0	+ 3.1	- 3.5	+ 0.5	- 1.5	- 0.3	- 1.0	- 0.6
	2/3	- 29.4	+ 3.0	- 3.7	- 0.6	0	+ 0.6	+ 1.1	+ 1.4	+ 1.7	+ 1.9	+ 2.1	+ 2.4
	7/8	+ 12.0	+ 4.9	+ 3.3	+ 2.9	+ 3.0	+ 3.3	+ 3.7	+ 4.2	+ 4.6	+ 5.1	+ 5.6	+ 6.0
	1	+ 30.3	+ 13.5	+ 7.8	+ 5.8	+ 5.2	+ 5.2	+ 5.6	+ 6.0	+ 6.6	+ 7.1	+ 7.7	+ 8.4

注：表中零误差指误差绝对值< 0.1%

图 3 是边界面换热系数不等其它条件不变时的计算结果。 $x = 0.01\text{m}$ 的边界面上 $\alpha = 0.15 \times 10^3 \text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, $y = 0$ 的边界面上 $\alpha = 15 \times 10^3 \text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, $z = 0$ 的边界面上 $\alpha = 1.5 \times 10^3 \text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, Δt 仍为 0.36s 。与图 2 相比, 振荡明显加大, 不仅 $\sigma = 0$ 时, 而且 $\sigma = 0.25$ 的计算都是不稳定的。各节点振荡平复后解的相对误差也较大, 而且 σ 越接近于 1 相对误差也越大。与图线对应的各点计算误差在表 2 中给出。

图 4 是用同于图 3 的边界不均匀换热系数, 而时间步长减小一半, 即 $\Delta t = 0.18\text{s}$ 所得的计算结果。 $\sigma = 0$ 时, 三个节点的计算都是不稳定的, 而 $\sigma = 0.25$ 的计算都是稳定的, 振荡幅度和相对误差都明显比图 3 所示为小。

四、结 论

1. 瞬态温度计算的时间差分格式对能否

趋于稳定解和振荡现象的产生有密切关系。 $\sigma \geq 0.5$ 是无条件稳定的, 较大的 σ 值对抑制振荡是有利的, $\sigma = 1$ 可消除振荡现象, 但 σ 较大时所得稳定解的误差也较大。

2. 尽管 $\sigma = 0.5$ 时理论上有很高的计算精度, 但在起始阶段可能会因振荡现象, 造成相对误差反而大于较高 σ 时的相对误差。

3. 不均匀的边界条件会加剧振荡现象。

4. 减小时间步长对抑制振荡和取得稳定的解都是有利的。

总之, 对于不同的计算条件和同一计算的不同时间阶段, 合理地选择加权系数 σ 和时间步长 Δt 可望取得较好的计算结果和较省的计算费用, 因而在计算模型中采用可变加权系数的递归公式是必要的。此外, 本文所涉及的只是温度计算随时间的振荡现象, 在实际计算中也曾出现随空间的振荡现象, 这种现象应该从相邻节点温度系数间的关系去分析。

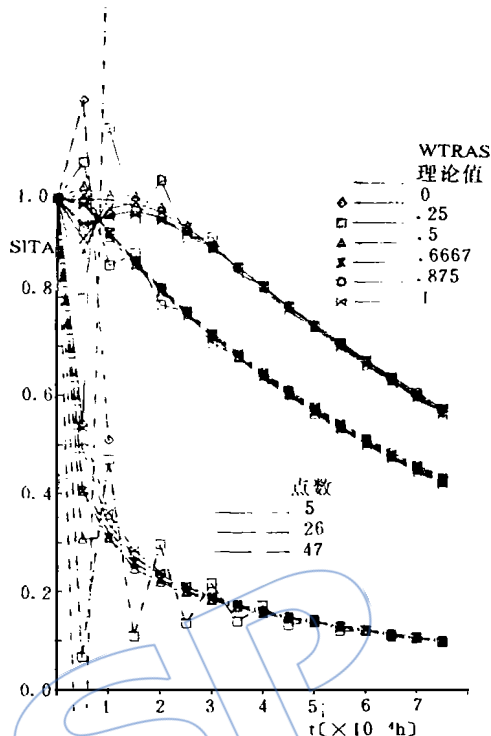


图 4 不均匀换热系数下, $\Delta t = 0.18\text{s}$ 的计算结果

参 考 文 献

- [1] 冀守礼、朱谷君、杨帆, 三维物体稳态及瞬态温度场的有限元分析, 工程热物理学报, 第 8 卷第 2 期, 1987 年。
- [2] C. C. 监凯维奇, 有限元法, 下册, 科学出版社, 1985 年。
- [3] T. D. Lambert, Computation Methods in Ordinary Differential Equations, Wiley, 1973.
- [4] 孔祥谦, 有限单元法在传热学中的应用, 第二版, 科学出版社, 1986 年。
- [5] E. L. Wilson, R. E. Nickell, Application of finite element method to heat transfer analysis, Nucl. Eng. Des., 4, 1-11, 1966.

DESIGN AND CALCULATION OF COMPOSITE AIR-COOLED BLADES IN A HIGHLY-LOADED TRANSONIC TURBINE

Deng Huayu, Liu Cunlu, Luo Mingjun, Liu Yufang, **Peng Qingming**

(*Gas Turbine Establishment*)

Sheng Rongchang, Gao Yuhua, Hu Zhiqing (*Nanhua Powerplant Research Institute*)

Wang Huage, Li Xingheng, Zou Xueyan (*Shenyang Aeroengine Research Institute*)

ABSTRACT

A set of calculation methods is presented for predicting coolant mass flow distribution, temperature rise, heat transfer coefficients (internal and external) and temperature field of transonic turbine blades with impingement convection-film cooling. Various air-cooled schemes has been calculated, in result four internal air-cooling structures in turbine blades have been chosen accordingly and designed elaborately. The results of calculation according to actual parameters are compared with the measured wall temperature distributions over turbine blades. Maximum and minimum deviations of the local wall temperature over the turbine vanes and blades are 9.8% and 2%, 6.4% and 1.3% respectively. The methods are verified to be credible and accurate.

CALCULATION OF COOLANT FLOW AND HEAT TRANSFER INSIDE COMPOSITE AIR-COOLED TURBINE

Deng Huayu, Liu Yufang, Luo Mingjun, **Peng Qingming**

(*Gas Turbine Establishment*)

ABSTRACT

A calculation method is presented for iterative solution of the coolant mass flow distribution, temperature rise and internal heat transfer coefficient inside composite air-cooled turbine blade. An numerical example is given. The effects of rotation on coolant flow and heat transfer are discussed. The method has been successfully applied to the design of air-cooled turbine blades for HPPSARP project, and it can also be used in model modification and calculation check.

NUMERICAL STUDY OF CONDUCTIVE TEMPERATURE DISTRIBUTION AND RECURRENCE RELATION IN TRANSIENT COMPUTATION

Zhu Gujun, Ji Shouli, Yang Fan

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

The numerical analysis of steady and unsteady conductive temperature distributions of turbine disk and blade is presented as part of HPPSARP project. It consists of two-dimensional (plane and axisymmetric) and three-dimensional problems. This paper gives a summary illustration of its features and emphasis on the stability of time recurrence relations in transient computation. A variable weighted coefficient to summarize the different time schemes is proposed in the developed computing program. It is favourable to improve the accuracy and restrain the oscillation in calculation. Some numerical examples are given to verify the characters of different schemes.