

榫头—榫槽连接的盘/片结构接触问题计算

复旦大学 唐国安 丁海成

燃气涡轮发动机盘/片组合结构的强度计算较多局限于对孤立的轮盘或叶片加以分析,或者将盘/片作为一个完整的连续体进行计算。但对于松动配合的盘/片结构(带枞树型、燕尾型叶根)用连续体模型是不合适的。另外松动安装的叶片在离心力作用下有一个自动定心过程,这一过程也难以用局部接触分析方法处理,因此考虑榫头—榫槽连接的盘/片组合结构是合理的。本文处理盘/片组合结构的接触问题采用了带线性不等式约束的二次规划—LCQP方法。这在形式上比直接用有限元(或边界元),加入适当边界条件的方法更为简练、明确,便于从数学上对算法进行分析研究,而且还可运用二次规划研究的新成果,有利于提高计算速度和精度。利用本文结果也能进一步研究连接刚度对盘/片结构动频的影响^[1]。

一、盘/片组合结构接触问题的二次规划方法

盘/片结构具有循环对称性,在离心力、气动力和热应力共同作用下,盘/片每个扇区的变形状态是相同的。对于其中一个扇区,可写出其势能表达式^[2]

$$\Pi = \int_{V_{b+d}} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \int_{V_{b+d}} f_i u_i dV - \int_{\Gamma_p} p_i u_i d\Gamma \quad (1)$$

上式中使用了重复指标的求和约定^[2],以下类同。考虑热应力的应力—应变关系为^[3]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta_j (T - T_0) \quad (2)$$

积分限 V_{b+d} 为一个扇区内盘/片所占的体积, f_i 为离心力向量, Γ_p 为受气动力作用的叶片表面, p_i 表示气动力向量。用位移法有限元离散后,扇区内轮盘和叶片的势能分别可写成^[4]

$$\hat{\Pi}^d = (1/2) (\bar{q}^d)^T \bar{K}^d \bar{q}^d - (\bar{q}^d)^T \bar{p}^d, \quad \hat{\Pi}^b = (1/2) (q^b)^T k^b q^b - (q^b)^T p^b \quad (3)$$

将扇区内轮盘的位移分为三个部分

$$\bar{q}^d = \{ (q^d)^T, (q^t)^T, (q^g)^T \}^T$$

如图 1a, 同时将 $\bar{K}^d$, $\bar{p}^d$ 也作相应的分块, 即

$$\bar{K}^d = \begin{pmatrix} k_{uu} & k_{u' } & k_{tg} \\ k_{t' i} & k_{t' i' } & k_{t' g} \\ k_{gt} & k_{gt' } & k_{gg} \end{pmatrix}^d, \quad \bar{p}^d = \begin{pmatrix} p_t \\ p_{t' } \\ p_g \end{pmatrix}^d$$

由循环对称性可知, q_t , $q_{t'}$ 只相差一个旋转, 即 $q_{t'} = T_{t'i} q_t$ 。于是

$$\bar{q}^d = \begin{pmatrix} I_{tt} & 0 \\ T_{t'i} & 0 \\ 0 & I_{gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_t \\ q_g \end{pmatrix} \quad (4)$$

将 (4) 式代入 (3) 式中第一式, 得到轮盘的势能表示式

$$\hat{\Pi}^d = (1/2)(q^d)^T k^d q^d - (q^d)^T p^d \quad (5)$$

其中

$$k^d = \begin{bmatrix} k_{uu} + k_{ui} T_{ii} + T_{ii}^T k_{ii} + T_{ii}^T k_{ii} T_{ii} & k_{ug} + T_{ii}^T k_{ig} \\ k_{gi} + k_{gi} T_{ii} & k_{gg} \end{bmatrix}^d$$

$$p^d = (p_i^T + P_i^T T_{ii}, p_g^T)^T, \quad q^d = (q_i^T, q_g^T)^T$$

再将轮盘叶片的位移按接触和非接触部分分解, 如图 1b, k^d, p^d, k^b, p^b 也作相应的分块, 即

$$k^d = \begin{bmatrix} k_{ff} & k_{fc} \\ k_{cf} & k_{cc} \end{bmatrix}^d, \quad p^d = \begin{bmatrix} p_f \\ p_c \end{bmatrix}^d, \quad q^d = \begin{bmatrix} q_f \\ q_c \end{bmatrix}^d, \quad (\text{叶片相同})$$

因为 q_f^d, q_c^d 是独立的, 故由静态凝聚法可得^[5]

$$q_f^d = (k_{ff}^d)^{-1}(p_f^d - k_{fc}^d q_c^d)$$

$$q_c^d = (k_{cc}^d)^{-1}(p_c^d - k_{cf}^d q_f^d) \quad (7)$$

代入 (3) 和 (5), 轮盘和叶片的势能又可写成

$$\hat{\Pi}^d = (1/2)(q_c^d)^T \tilde{k}_{cc}^d q_c^d - (q_c^d)^T \tilde{p}_c^d \quad (8.a)$$

$$\hat{\Pi}^b = (1/2)(q_c^b)^T \tilde{k}_{cc}^b q_c^b - (q_c^b)^T \tilde{p}_c^b \quad (8.b)$$

式中

$$\tilde{k}_{cc}^d = k_{cc}^d - k_{cf}^d (k_{ff}^d)^{-1} k_{fc}^d$$

$$\tilde{p}_c^d = p_c^d - k_{cf}^d (k_{ff}^d)^{-1} p_f^d \quad (\text{叶片相同})$$

于是, 轮盘和叶片的总势能可以写成

$$f(x) = (1/2)x^T Qx + x^T c \quad (9)$$

$$\text{其中 } Q = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{cc}^b & 0 \\ 0 & \tilde{k}_{cc}^d \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} q_c^b \\ q_c^d \end{bmatrix}, \quad c = - \begin{bmatrix} \tilde{p}_c^b \\ \tilde{p}_c^d \end{bmatrix}$$

根据弹性力学最小势能原理^[4], 盘/片组合结构的接触问题最终可归结为

$$\text{LCQP: } \min f(x) = (1/2)x^T Qx + x^T c \quad (10)$$

$$\text{受限于 } A^T x + b \geq 0 \quad (11)$$

(10)、(11) 是一个典型的二次规划问题, Avriel^[3]

对此问题给出了各种算法。求出 (10)、(11) 的极

小值就得到盘/片接触区域的位移, 再由 (7) 式可

得非接触区域的位移。整个结构位移得到以后, 应力的计算与常规的有限元方法相同。

盘/片耦合约束方程 (11) 建立如下。作用荷载后, 轮盘和叶片将在榫头、榫槽部位发生接触, 接触面大小和形状事先是未知的, 但接触部分的位移须满足协调条件, 要保证叶片和轮盘上质点不会相互渗入。Nguyen 等^[6]在两个接触物体之间引入一层虚拟介质, 虚拟介质与盘/片相连的表面随盘/片一起变形, 侧面自由, 如图 1b 所示。则盘/片的变形协调条件可定为

$$J \geq 0 \quad (12)$$

J 为虚拟介质的变形体积比。由于未加载时, 榫头、榫槽部分表面的接触可能是重合的, 虚拟介质变形前的体积就为零, 此时, (12) 式中的 J 是没有定义的。为此本文将 J 的定义修改为虚拟介质单元变形后的体积与自然坐标下的体积之比, 这种方式定义下的 J 总是有意义的,

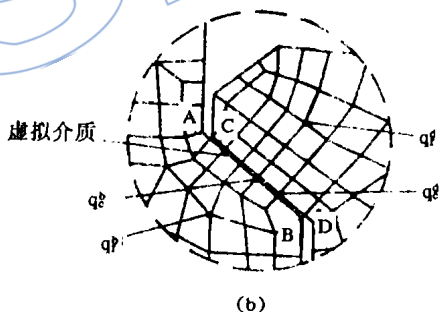
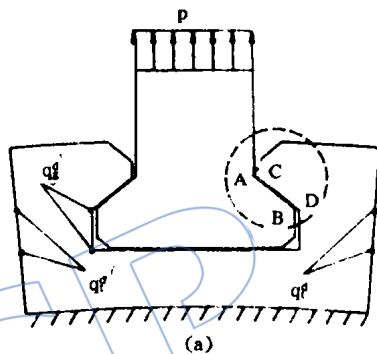


图 1 a. 盘/片对接示意图

b. 榫头-榫槽局部示意图

从而可以克服上述困难。设虚拟介质变形前坐标为 X_i , 位移为 u_i , 按我们的定义, J 应为

$$J = \det(X_{i,j} + u_{i,j}) \quad (13)$$

式中 $(\)_{,j}$ 表示关于自然坐标的偏导数。考虑小变形问题, 将 (13) 式展开即可得变形协调条件

$$\det(X_{i,j}) + A_{ij}u_{i,j} \geq 0 \quad (14)$$

其中 A_{ij} 为行列式 $\det(X_{i,j})$ 的代数余子式。将位移插值公式 $u = \psi_N u_i^N$ 代入 (14) 式得

$$\det(X_{i,j}) + A_{ij}\psi_{N,j}u_i^N \geq 0 \quad (15)$$

其中 ψ_N 为形函数, u_i^N 为结点位移, 由轮盘和叶片对接部位的位移组成。(15) 式要求在虚拟介质内处处成立, 而用有限元计算时可要求在有限个点上满足, 这有限个不等式写成矩阵形式就是 (11) 式。

二、榫头—榫槽接触应力计算实例

本文利用前面的方法作了图 1 所示的榫头—榫槽接触应力, 同时也用文献 [7] 的方法

用 SAP5 作了计算。接触区附近的单元划分如图 1b。本文计算时用的是三维有限元模型, SAP5 计算用了平面应变单元。由于 SAP5 不能直接处理离心力荷载, 故在叶片上给出的是面力, 面力密度为 $p = 147 \text{ MPa}$, 材料常数 $E = 115.64 \text{ GPa}$, $\mu = 0.25$ 。图 2 是计算所得结果, 实线是用本方法得到的榫头上的当量应力, 虚线是榫槽上的当量应力。实心圆点和空心圆点分

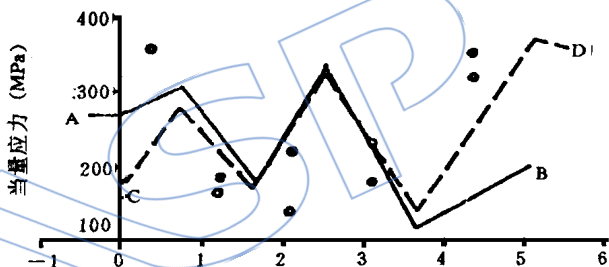


图 2 距槽口 C 点距离 (mm)

别为 SAP5 计算的相应结果。由于两种方法在边界条件处理上有所不同, 因此两者在结果上也略有差异, 但还是很接近的。本文还计算了实际涡轮盘/片的接触应力, 结果另文给出。

参 考 文 献

- [1] 王明祺, “带分流叶片离心叶轮的动频分析”, 复旦大学硕士学位论文, 1990 年。
- [2] Fung, Y. C., “Foundation of Solid Mechanics”, Prentice-Hall Inc., 1965.
- [3] M. 阿佛里耳著, “非线性规划 (下册)”, 上海科学技术出版社, 1980 年。
- [4] Bathe, K. J., “Finite Element Procedures in Engineering Analysis”, Prentice-Hall Inc., 1982.
- [5] Tong, P., “Finite-Element Method”, the MIT Press, 1977.
- [6] Nguyen, D. H., et. al., “Frictionless Contact of Elastic Bodies by Finite Element Method and Mathematical Programming Technique”, Computers and Structures, 1980.
- [7] 李明达主编, “有限单元法在燃气涡轮发动机零件强度计算中的应用”, 国防工业出版社, 1987 年。

results show that the fretting wear of the modified dovetail joints is palliated, especially at the root of contact surface. The fatigue life of the appropriately modified dovetail joints increases twice.

COMPUTATION FOR CONTACT PROBLEM OF A DISK-BLADE COUPLED COMPONENT

Tang Guoan and Ding Haicheng
(*Fudan University*)

ABSTRACT Contact stress of a disk-blade coupled component is analyzed by numerical method. The contact problem is reduced to a problem of quadratic programming with linear inequality constraints (LCQP). Objective function of the LCQP is derived from the principle of minimum potential energy of elastic bodies in combination with finite element method. In order to formulate the constrain equations, an imaginary media is introduced between the two contact surfaces. Then the displacement compatibility condition on the contact region can be considered as to make the imaginary media have non-negative volume during deformation. Such geometric condition will be prescribed by a set of linear inequalities after discretization. Besides, static condensation technique is also used to reduce the degree of freedoms of the LCQP problem. A practical problem is estimated by our method and SAP5 software. These two results are in good agreement.

INFLUENCE OF SIZE FACTOR ON SCATTER DEGREE OF THE LOW CYCLE FATIGUE LIFE OF A DISK

Xu Linyao and Sun Qin
(*Northwestern Polytechnical University*)

ABSTRACT From mathematical statistics of test data has been drawn the following conclusion: the low cycle fatigue life of disks scatters due to their size difference. The cyclic stress-strain curve and the strain-life relationship of a material must consider requirements of the survival probability and believable degree when the low cycle fatigue life of a disk is estimated with the partial stress-strain method. This paper also provides an approximate correction method for the preliminary estimation of the low cycle fatigue life of a disk.