

小失谐叶轮的固有振动分析

复旦大学 王 皓 王文亮

【摘要】 失谐的带有 N 个叶片的叶轮，由于失去了 N 阶回转对称性，用于谐调叶轮的群论方法不再适用，给其固有振动分析造成了困难。本文根据摄动理论，以谐调叶轮的主模态作为 Ritz 基，提出了一种适用于小失谐叶轮固有振动分析的模态综合技术。算例表明，文中方法是切实可行的。

一、前 言

带有 N 个完全相同叶片的叶轮是一个 N 阶回转对称结构。根据群论理论，可将系统的特征值问题转化为 N 个阶数仅为全部自由度数目的 $1/N$ 的厄米特矩阵特征值问题，以便减少存储量、缩短计算时间^[1]。这与整个叶轮直接进行有限元计算相比，在数学上完全等价。采用 Benfield-Hruda 模态综合技术，能够进一步降阶，便于精细的有限元分析，收效十分明显^[2]。

然而，实际上并不是所有的叶轮都能够作为谐调叶轮来处理。严格地说，任何两个叶片都不完全相同，当研究加工精度对叶轮固有振动的影响时，必须把普通叶轮作为失谐的来处理。研究表明，失谐叶轮能够明显地改善转子气动弹性稳定性，有效地抑制颤振^[3]，因而，失谐叶轮作为振动被动控制的一种手段而广泛地用于航空发动机中。

由于失谐叶轮不具有 N 阶回转对称性，故前述方法不再适用。将整个叶轮直接用有限元法进行振动分析无疑是不明智的，这样所得到的刚度、质量矩阵阶数很高，势必占用大量内存，耗费过多机时，费用昂贵。本文从小失谐叶轮的特点出发，首先“构造”一个平均化的谐调叶轮，按照前述方法求出其固有振动主模态，以此作为 Ritz 基对失谐叶轮进行模态综合，最终得到失谐叶轮的固有振动频率和振型。如果叶轮的失谐具有周期性，那么模态的选取是有章可依的。这种方法只需选取少量模态进行综合，所得结果的精度即可满足工程要求。

二、小失谐叶轮的固有振动分析

本文所讨论叶轮的失谐，可以是由于不同叶片材料特性差异所产生的；可以是因叶片的几何尺寸不同而引起的；或者是轮盘因素所致，例如轮盘上开有与叶片数目相异的圆孔。对于带有 N 个叶片的小失谐叶轮，按照处理谐调叶轮的方法，用 N 个具有回转对称性的曲面把它划分成 N 个扇区，记为 S_k ($k = 1, 2, \dots, N$)。 S_k 包括界面 w_k ，但不包括界面 w'_k ，(图 1)。将每个扇区离散为相同数目的单元，要求不同扇区的有限元网格的差异尽量小。各个扇区建立具有回转对称性的专用坐标系，在该坐标系上扇区 S_k 的结点位移列向量为：

$$\delta_k = \begin{bmatrix} \delta_{kw}^T & \delta_{kg}^T \end{bmatrix}^T, \quad k = 1, 2, \dots, N \tag{1}$$

这里， δ_{kw} 表示界面 w_k 上结点的位移， δ_{kg} 表示 S_k 内部结点的位移。则整个叶轮的结点位移为

本文于 1990 年 4 月收到。

$$\Delta = \delta_1^T \delta_2^T \dots \delta_N^T \mathbf{Y}^T \quad (2)$$

如果将 S_k 扩充一个界面 w_k , 称为扩充扇区 S_k 。记

$$\delta_k = \delta_{kw}^T \delta_{kg}^T \delta_{kw}^T \mathbf{Y}^T, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

注意, 界面 w_k 上结点位移 δ_{kw} 是参考扇区 S_{k+1} 的专用坐标系的。逐个计算 S_k 中单元的刚度矩阵和质量矩阵, 装配起来得到 S_k 的刚度矩阵和质量矩阵, 写成分块形式是

$$\mathbf{k}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ww}^{(k)} & \mathbf{k}_{wg}^{(k)} & \mathbf{k}_{wv}^{(k)} \\ \mathbf{k}_{gw}^{(k)} & \mathbf{k}_{gg}^{(k)} & \mathbf{k}_{gv}^{(k)} \\ \mathbf{k}_{vw}^{(k)} & \mathbf{k}_{vg}^{(k)} & \mathbf{k}_{vv}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{ww}^{(k)} & \mathbf{m}_{wg}^{(k)} & \mathbf{m}_{wv}^{(k)} \\ \mathbf{m}_{gw}^{(k)} & \mathbf{m}_{gg}^{(k)} & \mathbf{m}_{gv}^{(k)} \\ \mathbf{m}_{vw}^{(k)} & \mathbf{m}_{vg}^{(k)} & \mathbf{m}_{vv}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$k = 1, 2, \dots, N$

我们首先“构造”一个谐调叶轮, 它的各个扩充扇区的刚度矩阵和质量矩阵为

$$\mathbf{k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{k}^{(i)}, \quad \mathbf{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{m}^{(i)} \quad (5)$$

图 1 叶轮简图

这种构造方法称为平均化方法, 根据矩阵摄动理论, 这种构造方法可望使模态综合达到最佳效果^[4]。该谐调叶轮的振动方程等价于下列阶数较低矩阵的特征值问题

$$(\beta - \omega^2 \alpha_r) \Psi_r = 0, \quad r = 0, 1, \dots, N_f \quad (6)$$

这里, $N_f = [N/2]$, $[\]$ 表示取整。 β 和 α_r 是与 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{m}$ 相关的厄米特矩阵, 但 $r=0$ 和 $r=N/2$ 时为实对称阵, 阶数仅为叶轮全部自由度数目的 $1/N$ 。对于 $r=0, 1, \dots, N_f$ 求解方程 (6), 分别取出前 s_r 个加权正交归一的特征向量 Ψ_n ($n=1, 2, \dots, s_r$), 并将界面 w 上结点的复位移扩充进去, 成为 Ψ_n , 那么第 k 个扩充扇区的物理模态阵为^[5]

$$\mathbf{X}_r^{(k)} = d_r \{ \text{Re}(\Psi) \cos r(k-1)\alpha - \text{Im}(\Psi) \sin r(k-1)\alpha \} \quad (7)$$

$k = 1, 2, \dots, N; \quad r = 0, 1, 2, \dots, N_f; \quad \Psi = [\Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_{s_r}]; \quad \alpha = 2\pi/N$

式中

$$d_r = \begin{cases} 1/N, & r = 0, N/2 \quad (\text{若 } N \text{ 是偶数}) \\ 2/N, & r = 1, 2, \dots, [N-1]/2 \end{cases} \quad (8)$$

现在我们以 $\mathbf{X}_r^{(k)}$ 作为 Ritz 基, 即假定小失谐叶轮的物理模态为

$$\delta_k = \Phi^{(k)} \mathbf{c}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

$\Phi^{(k)} = [\mathbf{X}_0^{(k)} \mathbf{X}_1^{(k)} \dots \mathbf{X}_{N_f}^{(k)}], \quad \mathbf{c} = [c_0 \ c_1 \dots c_{N_f}]^T$

则特征方程为

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{c} = 0 \quad (10)$$

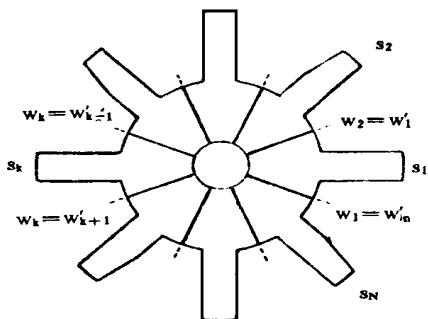
$$\mathbf{K} = (\tilde{\mathbf{K}}_{ij}), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N_f$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{ij} = d_i d_j \{ \text{Re}(\Psi)^T B_{ij} \text{Re}(\Psi) + \text{Im}(\Psi)^T C_{ij} \text{Im}(\Psi) - \text{Im}(\Psi)^T D_{ij} \text{Re}(\Psi) - \text{Re}(\Psi)^T E_{ij} \text{Im}(\Psi) \} \quad (11)$$

$\tilde{\mathbf{K}}_{ij}$ 为 $s_i \times s_j$ 矩阵

$$\mathbf{B}_{ij} = \sum_{k=1}^N \mathbf{k}^{(k)} \cos i(k-1)\alpha \cos j(k-1)\alpha, \quad \mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^N \mathbf{k}^{(k)} \sin i(k-1)\alpha \sin j(k-1)\alpha$$

$$\mathbf{D}_{ij} = \sum_{k=1}^N \mathbf{k}^{(k)} \sin i(k-1)\alpha \cos j(k-1)\alpha, \quad \mathbf{E}_{ij} = \sum_{k=1}^N \mathbf{k}^{(k)} \cos i(k-1)\alpha \sin j(k-1)\alpha \quad (12)$$



这里 K 是广义刚度矩阵。若把式中所有的 k 换为 m , 即为广义质量矩阵 M 。

通常, 模态综合时仅需要为数不多的模态信息, 故特征值问题 (10) 的阶数不高, 易于求解。从 (10) 中解出 λ 和 c , 叶轮的物理模态由 (9) 式得到。

周期性失谐是一种特殊的失谐方式。其特点是, 装在轮盘上的 N 个叶片可分为完全相同的 m 组, 每一组有 p 个彼此相邻的叶片 ($N = mp$, m 、 p 为整数), 差异发生在这 p 个叶片之间。 m 称为失调周期数, 这种叶轮是 m 阶回转对称结构。周期性失谐的优点是不需要用配重法来修正叶轮的质心位置和转动惯量, 使用方便。

周期性小失谐叶轮, 若把相邻的 p 个扇区合并为一个大扇区, 则得到 m 个完全相同的大扇区。记 $N_f' = \lfloor n/2 \rfloor$, 其特征向量可以分成 $N_f' + 1$ 个特征子空间^[5]。我们固然可以按 m 阶回转对称结构处理, 可是当 p 较大时仍不方便, 前述的模态综合技术将是很有效的。根据回转对称结构的性质, 对于 $r' = 0, 1, 2, \dots, N_f'$ 所对应的特征子空间, 只需选取下面集合中 r 所对应的模态进行综合: $R_r' = R_r^{(1)} U R_r^{(2)}$, $r' = 0, 1, 2, \dots, N_f'$

$$\begin{aligned} R_r^{(1)} &= \{r \mid r = mn + r', n = 0, 1, \dots, \lfloor (N_f - r')/m \rfloor\} \\ R_r^{(2)} &= \{r \mid r = mn - r', n = 1, 2, \dots, \lfloor (N_f + r')/m \rfloor\} \end{aligned} \quad (13)$$

周期性失谐叶轮的另一个特点是扩充扇区的刚度、质量矩阵呈周期性变化, 仅有 p 对是独立的。利用这两个性质, 可以把 (11)、(12) 式化简。限于篇幅, 这里仅给出交替失谐 (即 $p = 2$) 时的结果。当叶轮呈交替失谐时, $N = 2m$, $N_f = m$, $N_f' = \lfloor n/2 \rfloor$, $k = (k^{(1)} + k^{(2)})/2$, $m = (m^{(1)} + m^{(2)})/2$, 记 $\Delta k = \frac{1}{2}(k^{(1)} - k^{(2)})$, $\Delta m = (m^{(1)} - m^{(2)})/2$, $\Omega = \text{diag}(\omega_i^2)$ 由 (13) 得:

$$R_{r'} = \{r \mid r = r' \cup \{r \mid r = m - r'\}\}, \quad r' = 0, 1, 2, \dots, N_f'$$

$$(\tilde{K}_{r'} - \lambda \tilde{M}_{r'}) c_{r'} = 0, \quad r' = 0, 1, 2, \dots, N_f' \quad (14)$$

特征值问题为

$$\tilde{K}_o = \begin{pmatrix} \Omega & \Psi_o^T \Delta k \Psi_{N/2} \\ \Psi_{N/2}^T \Delta k \Psi & \Omega_{/2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_o = \begin{pmatrix} I & \Psi_o^T \Delta m \Psi_{N/2} \\ \Psi_{N/2}^T \Delta m \Psi & I \end{pmatrix}$$

其中, 当 $r' = 0$ 时:

$$\tilde{K}_{m/2} = \text{Re}(\Psi_{N/4}^T) k^{(1)} \text{Re}(\Psi_{N/4}) + \text{Im}(\Psi_{N/4}^T) k^{(2)} \text{Im}(\Psi_{N/4})$$

$$\tilde{M}_{m/2} = \text{Re}(\Psi_{N/4}^T) m^{(1)} \text{Re}(\Psi_{N/4}) + \text{Im}(\Psi_{N/4}^T) m^{(2)} \text{Im}(\Psi_{N/4})$$

当 $0 < r' \leq \lfloor (m-1)/2 \rfloor$ 时

$$\tilde{K}_{r'} = \begin{pmatrix} \Omega_{r'} & \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_{12}^T & \Omega_{m-r'} \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_{r'} = \begin{pmatrix} I & \tilde{M}_{12} \\ \tilde{M}_{12}^T & I \end{pmatrix}$$

$$\tilde{K}_{12} = \text{Re}(\Psi_{r'}^T) \Delta k \text{Re}(\Psi_{m-r'}) - \text{Im}(\Psi_{r'}^T) \Delta k \text{Im}(\Psi_{m-r'})$$

$$\tilde{M}_{12} = \text{Re}(\Psi_{r'}^T) \Delta m \text{Re}(\Psi_{m-r'}) - \text{Im}(\Psi_{r'}^T) \Delta m \text{Im}(\Psi_{m-r'})$$

以上的分析是针对静频的。至于小失谐叶轮的动频计算, 需要预先求出叶轮的动平衡位置, 而后再按上面的方法处理。这不是本文的重点, 具体公式恕不一一给出。

三、计算实例

按照上述理论, 我们编写了小失谐叶轮固有振动分析的通用程序, 并对大量模型进行了试算。这里给出一个用回转对称板模拟叶轮的例子。该模型有 18 个“叶片”, 通过修改“叶

片”厚度的方式使之失谐, 见图 2。
(盘外缘半径为 $6.0 \times 10^{-2} \text{m}$, 盘内缘半径为 $3.0 \times 10^{-2} \text{m}$, 叶外缘半径为 $7.5 \times 10^{-2} \text{m}$, 叶宽为 $6.98 \times 10^{-3} \text{m}$, 弹性模量为 $E=196 \text{GN/m}^2$, 密度为 $\rho=7.85 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 泊松比为 $\mu=0.28$, 叶片数为 $N=18$ 。谐调

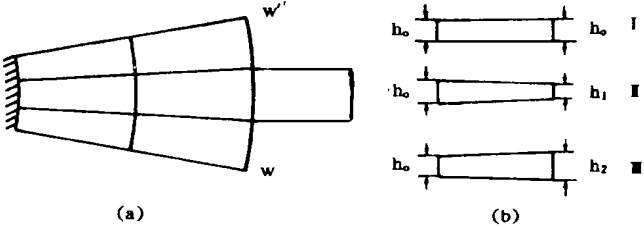


图 2 计算模型 (a. 一个扩充扇区; b. 叶片类型)

叶轮: 全部 型叶片。交替失谐:

型叶片交替分布。周期数为 3 失谐: 每个周期 、 、 型叶片各一个。)

计算时用 8 结点超参壳元进行结构离散。表 1~3 分别给出谐调、失谐周期数为 2 和 3 时的计算频率, 同时列出了用一个成熟的群论方法程序计算的 9 阶和 6 阶回转对称结构固有振动频率, 供比较。模态综合时选取 10 个振型作为 Ritz 基。表中带* 者为重频, 因篇幅所限, 振型图不再给出。

表 1 谐调系统计算频率

r	0	1*	2*	3*	4*	5*	6*	7*	8*	9*
f_1	372.9	380.1	417.5	515.8	681.9	889.0	1096.2	1265.8	1374.3	1411.3
f_2	1937.6	1953.7	2005.7	2103.2	2259.2	2491.0	2811.7	3223.0	3690.5	3996.2

表 2 交替失谐系统计算结果

r'	频率 (Hz)	本文方法	群论方法
0	f_1	382.5	382.7
	f_2	1457.4	1454.6
1*	f_1	390.0	390.2
	f_2	1422.7	1417.3
2*	f_1	428.7	428.8
	f_2	1311.8	1306.9
3*	f_1	529.7	529.7
	f_2	1133.7	1132.5
4*	f_1	699.7	699.5
	f_2	920.1	919.6

表 3 周期数为 3 的失谐系统计算结果

r	频率 (Hz)	本文方法	群论方法
0	f_1	372.0	372.1
	f_2	1064.7	1062.4
1*	f_1	379.3	379.4
	f_2	890.3	889.0
2*	f_1	416.6	416.6
	f_2	683.8	683.2
3*	f_1	500.3	500.0
	f_2	532.4	532.3

参 考 文 献

[1] 郑效忠、包刚、孙树勋, “Application of Group Theory to Vibrational Analysis of Shell Structure with Space Rotation Symmetry”, 国际有限元会议论文集, 科学出版社, 1982 年。
[2] 王文亮、张锦、陈向钧, “盘- 叶耦合系统的固有模态分析- C_N 群上对称结构的模态综合”, 固体力学学报, 第九卷, 第一期, 1988 年。
[3] Kaza, K. R. V. and Kielb, R. E., “Flutter of Turbofan Rotors with Mistuned Blades”, AIAA Journal, Vol. 22, No. 11, 1984.
[4] Wilkinson, J. H., “The Algebraic Eigenvalue Problem”, Clarendon Press, Oxford, 1965.
[5] 王皓, “航空发动机盘- 片- 轴系统的动力学分析”, 复旦大学硕士论文, 1989 年。

NATURAL VIBRATION ANALYSIS OF TURBOMACHINERY DISK WITH SMALL MISTUNED BLADES

Wang Hao and Wang Wenliang
(*Fudan University*)

ABSTRACT

A numerical approach is developed for natural vibration analysis of turbomachinery disk with small mistuning blades by using modal synthesis technique. Due to lack of rotational periodicity, the group theory method for the tuned bladed-disk assemblies is not applicable to the mistuned ones. According to the matrix perturbation theory, the modes used for synthesis in this paper are taken from a tuned bladed-disk corresponding to the small mistuning one. This new technique keeps the advantages of the group theory method and makes the final eigenvalue problem of small size. A computer program has been written to analyse the natural vibration characteristics of turbomachinery disk with small mistuning blades. The computational results prove that the method is very efficient.

TECHNICAL NOTES

VERTICAL ROTATING TESTER WITH VARIABLE-AMPLITUDE CYCLE FOR GAS TURBINE DISKS

Cao Fenglan, Wang Lusheng, Huang Songling
(*Gas Turbine Establishment*)

ABSTRACT

A microcomputer-controlled high-speed high-temperature rotating tester with variable-amplitude cycle has been constructed and operated to estimate the LCF life of gas-turbine disk. So far the tester has worked about 2500 hours (total cycle index is about 50000), without essential troubles. The data of the variable-amplitude LCF life for several disks have been obtained. These data are of high quality. It is testified that the test equipment is sufficient for performance research of rotating disks with diameter up to 1m and weight up to 300kg. The disk is mounted vertically on flexible shaft; an D. C. motor (125kw) drives the disk up to 25000rpm. The heater can raise the temperature of the disk up to 800 ± 5 . The average speed error for a run is less than 0.1%; the maximum instantaneous error is about 0.5%. A vacuum pump is used to sustain about 400 to 667Pa in the chamber of the tester.

A LOW CYCLE FATIGUE LIFE PREDICTION FOR DISK GROOVE BOTTOMS

Ru Meixiu, Cao Fenglan, Gong Mengxian
(*Gas Turbine Establishment*)

ABSTRACT

According to the theory of local strain fatigue, the fatigue experiments for the 30CrMnSiA disk have been completed on a multichannel radial loading fatigue rig ("Ferris" wheel). A good number of the crack propagation curves of the groove bottoms in the disk have been obtained. The calculations show that the median LCF life to