

湍流通用物理方程的推导及讨论

北京航空航天大学 高歌**

【摘要】 湍流的通用方程已经获得。利用变形率张量与摄动变形位移的点积分解湍流脉动速度,并使用密度加权的侧偏系综平均方法取代 Reynolds 平均方法,对 Navier-Stokes 方程进行平均。在二阶精度上没有出现未知相关量,从而获得了具有二阶精度的封闭的湍流通用物理方程。方程中无相关量,不引入任何经验系数,无需构造任何湍流模型,即可描述任意复杂湍流场并解释湍流物理本质。方程在长时标上描述湍流平均行为,在短时标上描述相应尺度层次的湍流结构现象,从而统一了湍流的统计及结构二大学派。方程简化后得到湍流的规范方程,是混合的 Burgers-Korteweg-de Vries 方程,对该方程的分析给出了湍流转换准则。文中对湍流的间歇性、拟序结构、各向异性、湍流能量逆转等现象的物理本质进行了初步讨论。

关键词: 湍流 通用方程 规范方程

1 前言

1883年 O. Reynolds 推出 Navier-Stokes 方程的平均方程,1921年 G. I. Taylor 引入相关量概念,1936年提出各态历经假说。近代湍流理论及模型的研究,基本上是在以上传统思想框架内进行的。综观湍流研究的百余年历史,可将湍流研究分为统计及结构两大学派。统计学派以 Reynolds 平均及各态历经假说为基础,研究物理及谱空间的相关动力学方程,建立了系统的经典统计理论。该理论体系可处理湍流的随机性、耗散性及谱连续性;对湍流的拟序结构性、能量逆转性、离散间歇性,则无能为力。以 Reynolds 平均为基础的统计理论除了必须面对不封闭问题之外,近年来又受到了决定论、非线性科学及大量湍流自组织结构实验事实的冲击;以 Reynolds 平均为基础的 $k-\varepsilon$ 、Baldwin-Lomax 或 Reynolds 应力模型已经幻灭了建立普适湍流模型希望。经典的湍流统计理论即不能解释结构,也不允许结构存在;另一方面,结构学派 25 年来始终未能建立任何系统理论。湍流研究的现状是:理论上不允许结构存在,结构却在没有理论的情况下存在着。

经典统计理论的最大弱点,在于不能全面解释湍流物理本质,封闭性、通用方程等一系列根本性问题长期得不到解决,导致异说蜂起,诸子百家各执其偏、莫衷一是。非线性动力学研究认为,非稳定系统的重复分叉决定性地导致混沌、奇异吸引子或湍流状态,并产生复杂的拓扑结构。Л. Ландау 提出的叠加周期振荡波谱概念已被确凿无疑地否定,以谱函数为基础的经典湍流理论也因之陷入困境。湍流决定论观点不仅否定有限空间的谱方法,也否认经典逼近的数学细节的合理性,即各态历经假说的正确性。这促使人们提出如下实质性疑问:

(1) 湍流问题是否可在 Navier-Stokes 方程的框架内解决? 是否需要引入新的物理原理?

(2)统计理论的基础—各态历经假说是否正确?

(3)Reynolds 平均是否是错误导向?

(4)平均湍流研究是否要引入混沌、分形等非线性学科的概念及研究手段?

本文探索了 Reynold 平均之外的新途径。Reynolds 平均方程中在二阶精度上出现未知相关量。本文中使用密度加权侧偏系综平均方法,使未知相关量没有出现在二阶精度上,从而获得了二阶精度所有湍流项的精确表达式,使寻找湍流通用方程的历史使命得以完成。所得方程即可在长时间标度上描述任意复杂平均湍流,又可在短时间标度上描述各尺度层次的结构现象。这就明确地回答了以上四个问题,湍流问题可以在 N-S 方程范畴内用侧偏系综平均方法得以解决,各态历经假说仅是时空均匀平移性成立时对高精度侧偏系综平均的一阶线性近似;百余年来湍流研究的困境主要是由 Reynolds 平均引起的,湍流的混沌、分形现象在短时间标度上受控于湍流物理方程,且时间标度愈短,现象愈明显,是方程短时标特性的具体表现。

2 不可压流的湍流方程

关于湍流通用方程的推导思路,参见文献[1]。不可压流的 N-S 方程

$$(\partial \vec{V} / \partial t) + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = - (1/\rho) \nabla P + \nu_L \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2)$$

在流场中任一固定点 x 处的解 s_i 由一组 $(\vec{V}_i, P_i)$ 值给出。层流状态在一定条件下有唯一解,湍流状态在同一个 t 时刻则有无穷多组解(本文中 t 是湍流平均运动的长时标)。设解 $s_0(\vec{V}_0, P_0)$ 为方程的任意一组解,处于 s_0 状态的流体受到一个任意摄动,产生脉动 $\vec{v}_i, p_i$,变动到状态 $s_i(\vec{V}_i, P_i)$,则有

$$\vec{V}_i = \vec{V}_0 + \vec{v}_i, \quad P_i = P_0 + p_i$$

$$(\partial \vec{V}_0 / \partial t) + (\vec{V}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_0 = - (1/\rho) \nabla P_0 + \nu_L \nabla^2 \vec{V}_0 \quad (3)$$

$$(\partial \vec{V}_i / \partial t) + (\vec{V}_i \cdot \nabla) \vec{V}_i = - (1/\rho) \nabla P_i + \nu_L \nabla^2 \vec{V}_i \quad (4)$$

(4)-(3)有

$$(\partial \vec{v}_i / \partial t) + (\vec{V}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_i + (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{V}_0 + (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i = - (1/\rho) \nabla p_i + \nu_L \nabla^2 \vec{v}_i \quad (5)$$

可按此方法得出由 s_0 变动到任意 s_i 的方程:

$$(\partial \vec{v}_i / \partial t) + (\vec{V}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_i + (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{V}_0 + (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i = - (1/\rho) \nabla p_i + \nu_L \nabla^2 \vec{v}_i \quad (5a)$$

对方程做第一次平均, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n$, 得出

$$(\partial \bar{\vec{v}}_0 / \partial t) + (\bar{\vec{V}}_0 \cdot \nabla) \bar{\vec{v}}_0 + (\bar{\vec{v}}_0 \cdot \nabla) \bar{\vec{V}}_0 + \overline{(\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i} = - (1/\rho) \nabla \bar{p}_0 + \nu_L \nabla^2 \bar{\vec{v}}_0 \quad (5b)$$

代入 $\bar{\vec{V}}_0 = \bar{\vec{V}} - \bar{\vec{v}}_0 = \bar{\vec{V}}_i - \bar{\vec{v}}_i$ 及 $\bar{\vec{V}}_i = \bar{\vec{V}} - \bar{\vec{v}}_i$

$$\begin{aligned} (\partial \bar{\vec{v}}_0 / \partial t) + (\bar{\vec{V}} \cdot \nabla) \bar{\vec{v}}_0 = & - (1/\rho) \nabla \bar{p}_0 + \nu_L \nabla^2 \bar{\vec{v}}_0 - (\bar{\vec{v}}_0 \cdot \nabla) \bar{\vec{V}} + 2(\bar{\vec{v}}_0 \cdot \nabla) \bar{\vec{v}}_0 \\ & - [(\bar{\vec{v}}_0 - \bar{\vec{v}}_i) \cdot \nabla](\bar{\vec{v}}_0 - \bar{\vec{v}}_i) \end{aligned} \quad (5c)$$

这是从 s_0 状态变动到平均状态 $\bar{s}$ 的脉动速度方程,同理可得出从任意 s_i 状态到平均状态 $\bar{s}$ 的方程:

$$(\partial \bar{\vec{v}}_i / \partial t) + (\bar{\vec{V}} \cdot \nabla) \bar{\vec{v}}_i = - (1/\rho) \nabla \bar{p}_i + \nu_L \nabla^2 \bar{\vec{v}}_i - (\bar{\vec{v}}_i \cdot \nabla) \bar{\vec{V}} + 2(\bar{\vec{v}}_i \cdot \nabla) \bar{\vec{v}}_i \quad (5d)$$

对方程做第二次平均,但一概不计入 $\bar{s}$ 点,得出

$$(\partial \bar{\vec{v}} / \partial t) + (\bar{\vec{V}} \cdot \nabla) \bar{\vec{v}} = - (1/\rho) \nabla \bar{p} + \nu_L \nabla^2 \bar{\vec{v}} - (\bar{\vec{v}} \cdot \nabla) \bar{\vec{V}} + 2(\bar{\vec{v}} \cdot \nabla) \bar{\vec{v}} \quad (6)$$

这即是平均脉动速度尺度的二阶精度控制方程。方程左侧是平均脉动的全加速度,右侧是 $\bar{s}$ 状态的流体作用于单位质量脉动流体的平均力,其中包括做摄动功的力及只产生旋转而不做功的力。需要剔除后者而求出有效做功力。上式中层流粘性系数 ν_L 已被有效粘性系数 $\nu_e = \nu_L + \nu_T$ 取代,其原因将在本节稍后予以解释。上述推导可知,对 $\bar{v}$ 并无一阶小量的限制。

在(5d)的二次平均中,右侧最后一项的平均仅取了近似值。如令 $\bar{v}_i = \bar{v} - \bar{v}'_i$,则

$$\begin{aligned} (\bar{v}_i \cdot \nabla) \bar{v}_i &= (\bar{v} - \bar{v}'_i)(\bar{v} - \bar{v}'_i) \\ &= (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + (\bar{v}_i \cdot \nabla) \bar{v}' - (\bar{v}'' \cdot \nabla) \bar{v} - (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v}' \\ &\cong (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + (\bar{v}' \cdot \nabla) \bar{v}' - (\bar{v}'' \cdot \nabla) \bar{v} - (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v}' \end{aligned}$$

由此可知,(6)中最后一项引起了误差,如将该误差补回,则有较高精度的方程

$$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{v}' = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p}' + \nu_e \nabla^2 \bar{v}' - (\bar{v}' \cdot \nabla) \bar{V} + 2[(\bar{v}' - \bar{v}') \cdot \nabla](\bar{v}' - \bar{v}') \quad (6a)$$

$\bar{v}'$ 可由方程

$$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + (\bar{v}' \cdot \nabla) \bar{v}' = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p}' + \nu_e \nabla^2 \bar{v}' - (\bar{v}' \cdot \nabla) \bar{v}' + 2[(\bar{v}' - \bar{v}') \cdot \nabla](\bar{v}' - \bar{v}') \quad (6b)$$

求出。余则类推。

如果瞬时摄动速度 v' 及变形率张量 ∇V 已知,则可引入摄动变形位移 δr ,以分解 v' 。引文献[1]中式(11),令 $\bar{v}_0 = \nabla V_0 \cdot \bar{\delta r}_0 = \nabla \Phi_0 + (1/2)\Omega_0 \times \bar{\delta r}_0$ 。将该式代入(5c)式右侧,略去最后一项,即可得出 s_0 状态的单位流体变动到 $\bar{s}$ 状态时所受的力 F_1 :

$$\begin{aligned} F_1 &= -(1/\rho) \nabla \bar{p}_0 + \nu_L \nabla^2 \bar{v}_0 - (\bar{v}_0 \cdot \nabla) \bar{V} + 2(\bar{v}_0 \cdot \nabla) \bar{v}_0 \\ &= -(1/\rho) \nabla \bar{p}_0 + \nu_L \nabla^2 [\nabla \Phi_0 + (1/2)\Omega_0 \times \bar{\delta r}_0] - (\bar{v}_0 \cdot \nabla) \bar{V} \\ &\quad + 2(\bar{v}_0 \cdot \nabla) [\nabla \Phi_0 + (1/2)\Omega_0 \times \bar{\delta r}_0] \end{aligned} \quad (7)$$

现分解式中 $\nabla^2(\Omega \times \delta r)$ 项

$$\nabla^2(\Omega \times \delta r) = \nabla[\nabla \cdot (\Omega \times \delta r)] - \nabla \times [\nabla \times (\Omega \times \delta r)]$$

令上式右端第一项为 I,第二项为 II。

$$\begin{aligned} \text{I} &= \nabla[\delta r \cdot (\nabla \times \Omega) - \Omega \cdot (\nabla \times \delta r)] \\ &= [(\nabla \times \Omega) \cdot \nabla] \delta r + (\delta r \cdot \nabla)(\nabla \times \Omega) + (\nabla \times \Omega) \times (\nabla \times \delta r) \\ &\quad + \delta r \times [\nabla \times (\nabla \times \Omega)] - [(\nabla \times \delta r) \cdot \nabla] \Omega - (\Omega \cdot \nabla)(\nabla \times \delta r) \\ &\quad - (\nabla \times \delta r) \times (\nabla \times \Omega) - \Omega \times \nabla \times (\nabla \times \delta r) \\ \text{II} &= \nabla \times [(\delta r \cdot \nabla) \Omega - (\Omega \cdot \nabla) \delta r + \Omega(\nabla \cdot \delta r) - \delta r(\nabla \cdot \Omega)] \\ &= \nabla \times (\delta r \cdot \nabla) \Omega - \nabla \times (\Omega \cdot \nabla) \delta r + (\nabla \cdot \delta r) \nabla \times \Omega \\ &\quad + \Omega \times \nabla(\nabla \cdot \delta r) - (\nabla \cdot \Omega) \nabla \times \delta r - \delta r \times \nabla(\nabla \cdot \Omega) \end{aligned}$$

对 I、II 二式点乘 δr ,并做一阶近似把 δr 看作是当地局部常数,则可得出 I、II 二项所做功为:

$$\begin{aligned} (\text{I} - \text{II}) \cdot \delta r &\cong [(\delta r \cdot \nabla)(\nabla \times \Omega) - \nabla \times (\delta r \cdot \nabla) \Omega] \cdot \delta r \\ &\cong -[\nabla(\delta r \cdot \nabla)] \times \Omega \cdot \delta r - [\nabla(\nabla \cdot \delta r)] \times \Omega \cdot \delta r \\ &\cong -[\nabla(\delta r \cdot \nabla)] \times \Omega \cdot \delta r \end{aligned} \quad (8)$$

对(7)做点乘 δr ,并将(8)代入之,则得出 s_0 状态单位质量的流体变动到 $\bar{s}$ 状态所受的有效做功力

$$F_{1s} = - (1/\rho) \nabla \bar{p}_0 + \nu_L \nabla^2 (\nabla \bar{\phi}_0) - (\nu_L/2) [\nabla (\bar{\sigma} r_0 \cdot \nabla)] \times \Omega_0 \\ - (\bar{v}_0 \cdot \nabla) \bar{V} + 2(\bar{v}_0 \cdot \nabla) \nabla \bar{\phi}_0$$

同理可得 s_i 状态的单位质量变动到 $\bar{s}$ 状态所受有效做功力

$$F_{is} = - (1/\rho) \nabla \bar{p}_i + \nu_L \nabla^2 (\nabla \bar{\phi}_i) - (\nu_L/2) [\nabla (\bar{\sigma} r_i \cdot \nabla)] \times \Omega_i \\ - (\bar{v}_i \cdot \nabla) \bar{V} + 2(\bar{v}_i \cdot \nabla) \nabla \bar{\phi}_i$$

对方程作第二次平均

$$\bar{F}_s = - (1/\rho) \nabla \bar{p} + \nu_L \nabla^2 (\nabla \bar{\phi}) - (\nu_L/2) [\nabla (\bar{\sigma} r \cdot \nabla)] \times \hat{\Omega} \\ - (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{V} + 2(\bar{v} \cdot \nabla) \nabla \bar{\phi} \quad (9)$$

这是 $\bar{s}$ 状态的单位质量流体作用于其它状态的流体的平均有效做功力。反之, $\bar{s}$ 状态的单位质量的流体受到的平均摄动做功力为 $-\bar{F}_s$ 。将该力替入文献[1]中式(9),有

$$(\partial \bar{V} / \partial t) + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = - (1/\rho) \nabla (\bar{P} - \bar{p}) + \nu_L \nabla^2 (\bar{V} - \nabla \bar{\phi}) + (\bar{v} \cdot \nabla) (\bar{V} - 2 \nabla \bar{\phi}) \\ + (\nu_L/2) [\nabla (\bar{\sigma} r \cdot \nabla)] \times \hat{\Omega}$$

式中 $\hat{\Omega} = \nabla \times \bar{V} = \nabla \times (\bar{V} - \bar{v})$ 。向量 $\bar{V}$ 及 $\nabla \bar{\phi}$ 方向恒相反,故可相除并令

$$\nu_T = - \nu_L [\nabla^2 (\nabla \bar{\phi}) / \nabla^2 \bar{V}]$$

则

$$\nu_L \nabla^2 (\bar{V} - \nabla \bar{\phi}) = (\nu_L + \nu_T) \nabla^2 \bar{V}$$

因为 $\nabla^2 (\nabla \bar{\phi}_i) = \nabla^2 (s_{ij} \cdot \bar{\sigma} r_j)$, 式中含有 V 的三阶导数, 可知该项是一正色散项。

仅就当地特性而言, 转换初始过程中当 $\bar{v}$ 数值增长时, $\nabla^2 (\nabla \bar{\phi})$ 也随之增长, 使 ν_T 值迅速增长, 产生 ν_T 与 $\nabla^2 V$ 的正反馈摄动自激效果, 使方程中的粘性系数变为 $\nu_s = \nu_L + \nu_T$, 并有

$$(\partial \bar{V} / \partial t) + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = - (1/\rho) \nabla (\bar{P} - \bar{p}) + \nu_s \nabla^2 (\bar{V} - \nabla \bar{\phi}) + (\bar{v} \cdot \nabla) (\bar{V} - 2 \nabla \bar{\phi}) \\ + (\nu_s/2) [\nabla (\bar{\sigma} r \cdot \nabla)] \times \hat{\Omega} \quad (10)$$

这就是不可压流的平均动量方程。随着转换过程中 ν_T 增大, 正色散项的增长受到负色散项及耗散项的压抑也增大, ν_T 最后达到动平衡态。自此可知, 具有自调性的湍流粘性系数 ν_T , 实质上是正色散对湍流影响的具体反映。 ν_T 的自激增长是一直观假设, 得到了数值计算的验证。

平均流及平均脉动流的连续方程是显而易见的:

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (12)$$

方程(6)、(10)~(12)组成不可压流的二阶精度的湍流方程组。

3 可压流的湍流方程组

可压流的湍流方程的推导思路和不可压流一样, 但需处理可压缩性、密度脉动对湍流的影响。为了避免方程中存在过多的涉及密度脉动的项, Faure 提出的密度加权速度的概念, 值得借鉴推广。引入密度加权之后, 必须细心处理密度相关项, 如 $\overline{\rho(V \cdot \nabla)V}$ 、 $\overline{\rho(V \cdot \nabla)v}$ 、 $\overline{\rho(v' \cdot \nabla)V}$ 、 $\overline{\rho(v' \cdot \nabla)v}$ 、 $\overline{\rho(V \cdot \nabla)\psi}$ 、 $\overline{\rho V}$ 、 $\overline{\rho\psi}$ 等, 式中 ψ 为任意标量。

根据密度加权速度的定义, 文献[1]中式(12), 可推出密度加权与非密度加权速度之间的关系式。

$$\overline{\rho V} = \overline{\rho V} = \overline{(\bar{\rho} - \rho')(V - v')} = \overline{\bar{\rho} V} - \overline{\rho' V} - \overline{\bar{\rho} v'} + \overline{\rho' v'} \\ = \overline{\bar{\rho}(V - v')} - \overline{\bar{\rho} V} + \overline{\bar{\rho} v'} = \overline{\bar{\rho} V} - \overline{\bar{\rho} V} + \overline{\bar{\rho} v'}$$

保证二阶精度, 可令 $\overline{\rho v'} \cong \overline{\bar{\rho} v'}$, 则

$$\bar{V}^* = V(1 - \bar{\rho}/\bar{\rho}) \quad (13)$$

$$\text{同理 } \overline{\rho v'} = \overline{\rho v'} = (\bar{\rho} - \rho')v' = \bar{\rho}v' - \bar{\rho}'v'$$

$$\bar{v}' = \bar{v}'(1 - \bar{\rho}/\bar{\rho}) \quad (13a)$$

$$\text{同理可得} \quad \bar{T}^* = T(1 - \bar{\rho}/\bar{\rho}), \quad \bar{T}' = \bar{T}'(1 - \bar{\rho}/\bar{\rho}) \quad (13b, c)$$

现分别处理以上相关项,并推出相应参量的湍流方程。

3.1 处理 $\overline{\rho(V \cdot \nabla)V}$ 项

$$\begin{aligned} \overline{\rho(V \cdot \nabla)V} &= (\bar{\rho} - \rho')[(\bar{V}^* - v') \cdot \nabla](\bar{V}^* - v') \\ &= \overline{\bar{\rho}(\bar{V}^* \cdot \nabla)\bar{V}^*} + \overline{\bar{\rho}(v' \cdot \nabla)v'} - \overline{\rho'(v' \cdot \nabla)v'} - 2\overline{\bar{\rho}(v' \cdot \nabla)\bar{V}^*} \\ &\quad + 2\overline{\rho'(v' \cdot \nabla)\bar{V}^*} - \overline{\rho'(\bar{V}^* \cdot \nabla)\bar{V}^*} \\ &= \overline{\bar{\rho}(\bar{V}^* \cdot \nabla)\bar{V}^*} + \overline{\rho(v' \cdot \nabla)v'} + [(\bar{\rho}'v' - \bar{\rho}v') \cdot \nabla]\bar{V}^* \\ &\quad - (\bar{\rho} - \rho')(v' \cdot \nabla)\bar{V}^* \\ &= \overline{\bar{\rho}(\bar{V}^* \cdot \nabla)\bar{V}^*} - \overline{\rho(v' \cdot \nabla)V^*} \end{aligned} \quad (14)$$

利用该结果,立得密度加权的侧偏系数平均的 N-S 方程:

$$\frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial t} + \bar{u}_j' \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \nu \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} + \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho u' (\partial/\partial x_j) u'_j}$$

再使用与不可压流同样方法求出平均湍流力,并参考(10)式的推导,可得出平均湍流动量方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_i'}{\partial t} + (\bar{V}^* \cdot \nabla)\bar{V}_i' &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{P} + \nu \nabla^2 \bar{V} + (\bar{v}' \cdot \nabla)(\bar{V} - 2 \nabla \bar{\Phi}) \\ &\quad + \frac{\nu}{2} [\nabla(\bar{\sigma} \cdot \nabla)] \times \hat{\Omega} + \frac{\nu}{3} \nabla(\nabla \cdot \bar{V}) \end{aligned}$$

或

$$\frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial t} + \bar{u}_j' \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \bar{u}_j' \frac{\partial (\bar{u}_i - 2 \nabla \bar{\Phi}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\nu}{2} \frac{\partial \bar{\sigma}_{mij}}{\partial x_m} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \nu \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \quad (15)$$

式中 $\bar{P} = \bar{P} - \bar{p}$, $\bar{V} = \bar{V} - \nabla \bar{\Phi}$, $\hat{\Omega} = \nabla \times (\bar{V} - \bar{v})$

3.2 处理方程(5a)中 $\rho(V_i \cdot \nabla)v'_i + \rho(v'_i \cdot \nabla)V_i + \rho(v'_i \cdot \nabla)v'_i$ 三项的相关平均

对上式做一次平均后,代入 $V_0 = \bar{V} - \bar{v}_0$ 并参见(6)式的推导,二次平均后有

$$\bar{\rho}(\bar{V} \cdot \nabla)\bar{v}' - 2\bar{\rho}(\bar{v}' \cdot \nabla)\bar{v}' + \bar{\rho}(\bar{v}' \cdot \nabla)\bar{V}$$

由此可得出平均脉动速度 $\bar{v}'$ 的控制方程。

$$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla)\bar{v}' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{P} + \nu \nabla^2 \bar{v}' + \frac{\nu}{3} \nabla(\nabla \cdot \bar{v}') - (\bar{v}' \cdot \nabla)\bar{V} + 2(\bar{v}' \cdot \nabla)\bar{v}' \quad (16)$$

3.3 处理 $\overline{\rho V}$ 项

s_1, s_2 项状态的流体的连续方程分别为

$$(\partial \rho_1 / \partial t) + \nabla \cdot (\rho_1 V_1) = 0, \quad (\partial \rho_2 / \partial t) + \nabla \cdot (\rho_2 V_2) = 0$$

二式相减有 $(\partial \rho'_1 / \partial t) + \nabla \cdot (\rho_1 v'_1 + \rho'_1 V_1 + \rho'_1 v'_1) = 0$, 做一次平均后替入 $\rho_1 = \bar{\rho} - \bar{\rho}'_1$, $V_1 = \bar{V} - \bar{v}'_1$, 再

参见(6)式推导,做二次平均得出

$$(\partial \bar{\rho} / \partial t) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{v}' + \bar{\rho}' \bar{V} - 2 \bar{\rho}' \bar{v}') = 0 \quad (17)$$

这即是脉动量的连续方程。

平均量的连续方程为

$$(\partial \bar{\rho} / \partial t) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{V}^0) = 0 \quad (18)$$

3.4 处理 $\rho(V_1 \cdot \nabla)\phi + \rho(v'_1 \cdot \nabla)\phi + \rho(v'_1 \cdot \nabla)\phi$ 三项的相关平均

式中 ϕ 是任意标量。

以上项一次平均后代入 $V_1 = \bar{V} - \bar{v}'_1$, $\phi_1 = \bar{\phi} - \bar{\phi}'_1$ 后再做二次系综平均,并类比(6)式结果,则有

$$\bar{\rho}(\bar{V} \cdot \nabla)\bar{\phi}'' + \bar{\rho}(\bar{v}' \cdot \nabla)\bar{\phi} - \bar{\rho}(\bar{v}' \cdot \nabla)\bar{\phi}' - \bar{\rho}(\bar{v}' \cdot \nabla)\bar{\phi}''$$

由此得到平均脉动焓方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{h}''}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{h}''}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \frac{\bar{\phi}}{\rho} - \bar{u}_j' \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j} - 2 \frac{\partial \bar{h}'}{\partial x_j} \right) \\ \bar{\phi} &= \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right] \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

并进而得出平均焓方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{h}^0}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{h}^0}{\partial x_j} &= Q + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \frac{\bar{\phi}}{\rho} + \bar{u}_j' \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j} - 2 \frac{\partial \bar{h}'}{\partial x_j} \right) \\ \bar{\phi} &= \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right] \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

3.5 处理 ρRT

状态 s_1, s_2 的流体的状态方程分别为

$$P_1 = \rho_1 RT, P_2 = \rho_2 RT_2 \quad \text{或} \quad (P_1 + p'_1) = (\rho_1 + \rho'_1) R(T_1 + T'_1)$$

二式相减有 $p'_1 = \rho_1 RT'_1 + \rho'_1 RT_1 + \rho'_1 RT'_1$ 。一次平均后替入 $\rho_1 = \bar{\rho} - \bar{\rho}'_1$, $T_1 = \bar{T} - \bar{T}'_1$, 参见(6)式推导,做二次平均,则有

$$\bar{p}' = \bar{\rho} R \bar{T}' + \bar{\rho}' R \bar{T} - 2 \bar{\rho}' R \bar{T} \quad (21)$$

这就是平均脉动量的状态方程。显而易见,平均量的状态方程为:

$$\bar{P} = \bar{\rho} R \bar{T}^0 \quad (22)$$

方程(15)~(22)共同组成可压湍流的通用封闭方程组。

4 湍流的规范方程及转换准则

在一维流情况,平均流动量方程(10)可简化为规范型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

对于许多局部运动,压力梯度亦可略去,方程可进一步简写为 Burgers-Korteweg-de Vries 方程:

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0 \quad (23)$$

式中 ν 为耗散系数, $\beta = \nu \delta x$ 是色散系数, δx 是局部摄动变形位移。这表明湍流的色散系数的本质是粘性与摄动变形位移相互作用的结果。该方程可称之为湍流的规范方程,它表明湍流是同

时兼有耗散和色散二种特性的流体物理现象—这是对湍流定义的重要补充。利用湍流的规范方程取代动量方程(10)、(15),可在减少动量方程复杂性的同时,保存湍流的非线性、耗散及色散性,便于解析研究,得出转换准则。

当正色散由小增大、耗散由大变小时,B-K-dv 方程逐次呈现单调的冲波解、稳定的周期性渐衰波列解及不稳定的湍流颤振解。从稳定波列向非稳定的颤振转变过程中的分叉解对转换机理的研究有重要意义。众所周知,湍流是由不稳定性引起的,但不稳定并非一概引发湍流。由于耗散及色散同时存在,B-K-dv 方程的不稳定性分析是十分复杂的。一些特定情况的显式解只能通过物理直觉方式得出。

无量纲化的 B-K-dv 方程为

$$U_t + UU_x - (1/Re)U_{xx} + (1/Ge)U_{xxx} = 0 \quad (24)$$

式中 $Re = LU/\nu$, $Ge = L^2U/\beta$ 。

令 $u = U + u'$ 并代入上式,略去高阶小量后有

$$u'_t + u'U_x + Uu'_x - (1/Re)u'_{xx} + (1/Ge)u'_{xxx} = 0 \quad (25)$$

该线性化扰动方程允许解和初始数据的迭加或分解。做变量分解,令 $u'(x,t) = N(x)T(t)$ 。式中

$$-(T_t/T) = c = \{L[N(x)]\}/N(x), \quad N = N_r + iN_i$$

令 L 表示实空间的线性算子

$$L = (1/Ge)(d^3/dx^3) - (1/Re)(d^2/dx^2) + U(d/dx) + U_x$$

则有

$$(L - c)N(x) = 0 \quad (26)$$

这是控制 $N(x)$ 的复数方程。如分为实、虚二部,则有

$$(L - c_r)N_r = -c_i N_i, \quad (L - c_r)N_i = c_i N_r \quad (26a)$$

消去 N_r 或 N_i , 则有

$$[(L - c_r)^2 + c_i^2]N_r = 0, \quad [(L - c_r)^2 + c_i^2]N_i = 0 \quad (26b)$$

由此可知, N_r 、 N_i 分别由一个六阶常微分方程控制,由于 L 是具有变动系数 U 及 U_x 的常微分算子,方程(26)不能产生 $\exp[imx]$ 型式的指数解,不论 m 是实是虚皆如此。这就是问题的复杂性之所在,对(26b)进行解析逼近几乎是不可能的。

由于 U 及 U_x 仅出现在低阶项,且小扰动的时空尺度很小,局部扰动不可能极大地改变 U 及 U_x ,因此可把 U 、 U_x 看作是局部近似常数。如是, L 变为具有定常系数的线性算子,并允许“局部”的指数解存在。这意味着解不再强烈依赖于初始数据的迭加。

$$\text{令 } u' = F(x)e^{im(x-ct)}, \quad c = c_r + ic_i \quad (27)$$

式中 $F(x)$ 是实函数,把(27)式代入(25),其虚部为:

$$\frac{3}{Ge}F''' - \frac{2}{Re}F'' + \left(U - c_r - \frac{m^2}{Ge}\right)F = 0 \quad (28)$$

该方程的通解是

$$F = C_1 \exp \left\{ \left[\frac{1}{3} \frac{Ge}{Re} + \sqrt{\frac{1}{9} \left(\frac{Ge}{Re} \right)^2 + \frac{m^2}{3} - (U - c_r) \frac{Ge}{3}} \right] x \right\} \\ + C_2 \exp \left\{ \left[\frac{1}{3} \frac{Ge}{Re} - \sqrt{\frac{1}{9} \left(\frac{Ge}{Re} \right)^2 + \frac{m^2}{3} - (U - c_r) \frac{Ge}{3}} \right] x \right\} \quad (29)$$

则有

$$u' = C_1 \exp \left\{ \left[\frac{1}{3} \frac{Ge}{Re} + \sqrt{\frac{1}{9} \left(\frac{Ge}{Re} \right)^2 + \frac{m^2}{3} - (U - c_r) \frac{Ge}{3}} \right] x + mc_r t + im(x - c_r t) \right\} \\ + C_2 \exp \left\{ \left[\frac{1}{3} \frac{Ge}{Re} - \sqrt{\frac{1}{9} \left(\frac{Ge}{Re} \right)^2 + \frac{m^2}{3} - (U - c_r) \frac{Ge}{3}} \right] x + mc_r t + im(x - c_r t) \right\} \quad (30)$$

$$\text{如果} \quad \frac{1}{9} \left(\frac{Ge}{Re} \right)^2 + \frac{m^2}{3} - (U - c_r) \frac{Ge}{3} < 0 \quad \text{或} \quad \frac{1}{9} \left(\frac{Ge}{Re} \right)^2 + \frac{F'}{F} - \frac{2}{3} \frac{Ge}{Re} \frac{F'}{F} < 0 \quad (31)$$

并令 $in = \sqrt{(1/9)(Ge/Re)^2 + (m^2/3) - (U - c_r)(Ge/3)}$ 则(30)式的主波函数 η 为:

$$\eta = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m(x - c_r t) \cos nx = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \{ \cos[(m+n)x - mc_r t] + \cos[(m-n)x - mc_r t] \} \quad (32)$$

波幅的增长也受时空复合因子控制:

$$\exp[(1/3)(G_r/R_e)x + mc_r t] \quad (33)$$

(32)式是一时空耦合波函数,当振幅加强系数为正时,即出现时空耦合不稳定性。这种时空不稳定性比单一的时间不稳定性或空间不稳定性更真实地反映不稳定性的实际过程。当 $n \neq m$ 时,耦合波包散乱;当 m/n 为整数或近似整数时,耦合波包呈现节点分明的间歇波包。这表明,湍流间歇性的本质乃是耗散、色散两种物理机制共同作用产生的时空不稳定性所形成的调制波包(modulated wave packets of m and n waves)。当(31)式得到满足时,出现时空不稳定特性,且可产生湍流斑。湍流斑急剧发展、增多,导致充分发展湍流。(31)式即是湍流转捩的判据,从式中可知,转捩过程受耗散系数(或 Re 数)、色散系数(Ge 数)、扰动振幅 F 及其空间导数 F' 、 F'' 诸多因素的影响。仅使用 Re 数作为转捩准则是极不精确的。

时空耦合不稳定性的发现是极为重要的,它揭示了湍流转捩及间歇性的机理。转捩是耗散、色散共同作用的直接结果,它呈现时空不稳定性、间歇性的拓扑图形及局部离散性等重要湍流特性。

5 有关湍流方程物理特性的概要讨论

上节的讨论已经表明,湍流是流体中同时兼有耗散与色散二种物理特性的时空不稳定现象。这是湍流的最本质的物理特征。

耗散过程遵从广义热力学第二定律,耗散系数 $\nu_r = \nu_L + \nu_T$ 恒大于零,耗散项 $\nu_r \nabla^2 \bar{V}$ 与流体平均速度 $\bar{V}$ 的方向相反,在流动过程中恒起阻力、消耗流体平均动能的作用。

色散可分为正色散、负色散二种,共同描述湍流涡团的碰撞时的粒子特性。(10)式中的正色散项为

$$- \nu_r \nabla^2 (\nabla \Phi) = - (1/2) \nu_r \frac{\partial}{\partial r_j} [(\partial^2 u_i / \partial x_j^2) + (\partial^2 u_j / \partial x_i^2)]$$

该项由速度的三阶导数及色散系数 $\beta = (1/2) \nu_r \frac{\partial}{\partial r_j}$ 组成。正色散描述湍流涡团相互碰撞时的级联散裂(cascade down)过程及散裂涡团的各向同性散射。从本文的湍流涡团粘性系数 ν_T 的定义 $\nu_T = - \nu_L \nabla^2 (\nabla \Phi) / \nabla^2 \bar{V}$ 中可以看出,正色散又是决定 ν_T 的关键因素。可以断言,没有正色散,就没有湍流。

$$\nu_T \nabla^2 (\bar{V} - \nabla \Phi) = - \nu_L \nabla^2 (\nabla \Phi) + \nu_L \{ [\nabla^2 (\nabla \Phi)]^2 / \nabla^2 \bar{V} \} \quad (34)$$

从上式右侧第一项可以看出,由于 $\nabla \Phi$ 是局部摄动量函数,由正色散决定的湍流涡团粘性系数 ν_T ,使全流场的椭圆型函数 $\nu_T \nabla^2 \bar{V}$ 转变成了局部椭圆型函数 $- \nu_L \nabla^2 (\nabla \Phi)$,这意味着局部扰动

难于按全场椭圆型函数特性全场传播;右侧第二项则表明, $\nabla^2(\overline{\nabla\phi})$ 值的变动将按平方倍迅速调整湍流粘性项的大小。以上二种特性都符合真实湍流的阻尼特性,在计算流体力学中则将大大加速椭圆型方程数值求解的收敛速度、保证稳定性并消除三维计算冗长费时的特性,使三维计算和二维计算具有同样的收敛速度。计算流体力学中将不必再依赖数值粘性或人工粘性。具体计算中,各向同性 ν_T 可用下式计算:令矢量 $\nabla^2(\overline{\nabla\phi}) = (x_1, y_1, z_1)$, $\nabla^2\bar{V} = (x_2, y_2, z_2)$ 则

$$\nu_T = - (1/3)\nu_L[(x_1/x_2) + (y_1/y_2) + (z_1/z_2)] \quad (35)$$

(34)式又表明,耗散项与正色散项共同组成双曲型函数。在附面层中, $\bar{V}$, $\overline{\nabla\phi}$ 数值相当时,会产生双曲型涡波的特征线网,解释鱼鳞减阻原理。

(10)式中的负色散项

$$(1/2)\nu_L[\nabla(\bar{\sigma}r \cdot \nabla)] \times \hat{\Omega} = (1/2)(\partial/\partial x_j)\nu_L \bar{\sigma}r_{mj}(\partial\hat{\Omega}_i/\partial x_m)$$

该项也由速度的三阶导数及色散系数组成,描述湍流涡团碰撞过程中,小涡团在大涡团的相对涡量产生的哥氏力作用下改变运动方向,被大涡团吸收的过程。负色散解释了湍流能量逆转、湍流能谱的截断(cut off)及湍流场中局部地区的负粘性现象。在自然界中则可解释台风、龙卷风的能量集聚、湍流附面层速度型丰满原因及涡嘴管总温分离效应(Ranque-Hilsch effect)。

综上所述,湍流中包括有耗散及色散二种基本物理机制。耗散单向进行,描述湍流能量的粘性耗损;色散则可正可负,双向进行,描述在变为分子热之前湍流能量在平均流及大小涡团间的或散或聚的转换过程。耗散与负色散共同压抑正色散,使三者处于动平衡之中。

方程(10)中的 $(\bar{v} \cdot \nabla)(\bar{V} - 2\overline{\nabla\phi})$ 是一非线性项,在非定常过程中控制湍流拟序结构的流向。在非定常过程的数值计算中,湍流结构的大小及周期则与计算中所用时间尺度有关,该尺度越小,显示的结构层次越细致;周期的长短则由非定常过程中耗散与正色散相互作用产生的间歇性决定。在各种不同的局部初边值条件下以上非线性项产生出多种尺度的拟周期性(间歇性)的多种分维结构,负色散过程则通过能量逆转向拟序结构输送能量。本文所得的湍流方程组,在长时间标度上描述平均湍流,在短时间标度上描述湍流结构现象,这就为统一湍流的统计及结构两大学派,建立通用湍流理论提供了研究方向。

方程(10)中右侧除去 $-(1/\rho)\nabla\bar{P} + \nu_L\nabla^2\bar{V}$ 之外的所有项,共同组成二阶精度的湍流力的准确表达式。虽然涡团粘性系数是各向同性的,但各方向上湍流力均不相同,形成各向异性湍流。

方程(15)右侧最后一项 $(\nu_L/3)\nabla[\nabla \cdot (\bar{V} - \overline{\nabla\phi})]$ 中含有的 $(\nu_L/3)\nabla[\nabla \cdot (\overline{\nabla\phi})]$ 一项,表示湍流摄动应变速度的散度与噪音的关联关系。背景噪音通过该项对转换过程起最初的诱发作用,当转换准则(31)式满足时, $\overline{\nabla\phi}$ 引起的正色散作用及自激正反馈增长作用导致迅速完成转换过程。

6 后 记

(1)平均脉动速度 $\bar{v}$ 方程(6)的推导过程中,实际上已经使用了各态历经假说。 $s_0(V_0, P_0)$, $s_1(V_1, P_1)$ 是湍流脉动运动时间标度上不同时刻的二组解,从 s_0 到 s_1 的变动过程是经过时间间隔及空间间隔才完成的。但在湍流平均运动时间标度上则认为是同一时刻、同一地点的不同解。和 Reynolds 平均一样,侧偏系综平均使用了各态历经假说,处置了两种时标的关系。

(2)在平均过程中使用了如下直观假设,认为一次平均之后得出的平均脉动速度 $\bar{v}$ 已经半有序化:在向 $\bar{s}$ 变动的指向上有序了,但在与该指向垂直的方向上仍是随机的。二次平均后,

随机的部分相关之后相消了,有序的部分则不产生相关。因之在(5d)式的二次平均中有

$$(\bar{v}_i \cdot \nabla) \bar{v}_i \cong (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v}$$

在得出(9)式的二次平均中有

$$\frac{v_L}{2} [\nabla (\bar{\sigma}_r \cdot \nabla)] \times \bar{\Omega} \cong \frac{v_L}{2} [\nabla (\bar{\sigma}_r \cdot \nabla)] \times \bar{\Omega}$$

一次平均是侧偏的,二次平均是不计入 $\bar{s}$ 状态的中心平均,这种平均方法保证了平均脉动量不为零。

(3)均流均脉差参数也是平均参数,表征没有平均脉动量时的假想的层流伴随场的参数。 $\bar{v}$ 则表示该假想流与平均湍流的速差,是局部湍流引起的速度亏损值。 $\bar{v}$ 与 $\bar{V}$ 指向恒相反, $\nabla \phi$ 则与 $\bar{v}$ 指向恒相同。

(4)湍流发展历史已在 $\bar{v}$ 的输运方程中描述。

(5)从(6)式具体推导过程可以看出,本文所用的平均方法中,在二阶精度方程中实际上并不产生相关量,但(6)式并非准确方程,近似平均处理仍然引起一定的误差。(6a)补回误差的过程,则要使用更高阶小量的方程(6b)。在(8)式的推导过程中,把 $\bar{\sigma}_r$ 看作是局部常数的处理,也引起一定误差。由此可见,本文得出的是湍流的近似通用物理方程。

参 考 文 献

- 1 高歌. 湍流的通用物理方程. 航空动力学报, 1992, 7(3), 199—203

【编后语】 本期发表的高歌的文章是上期发表的“湍流的通用物理方程”的补充。上期发表的这篇论文引起读者强烈反响,这是可喜的现象。只有学术思想活跃才能形成百家争鸣的局面。因此本刊真诚地希望专家学者们对上述两篇文章进行公开的讨论,本刊将优先刊登这类稿件。当然,真理检验的标准是实践,作者曾利用自己的理论做出过一些实践成果,这也是本刊发表该文的依据之一。本刊希望专家学者们用自己的实践来丰富这场学术争论,使这场学术讨论在实践的沃土上生根发芽、开花结果。

DERIVATION OF THE UNIVERSAL PHYSICAL EQUATION OF TURBULENCE AND ITS CANONICAL FORM

Gao Ge

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

The fully-detailed derivation of the universal physical equation of turbulence has been given. Instead of the conventional Reynolds average, a new method, named off-center ensemble average, is used to obtain the equation. Through some mathematical approximations and without introducing any empirical coefficients, the equation may provide a secondary order of accuracy, which satisfies the needs of engineering study of turbulence. In one-dimensional case, the momentum equation of turbulence is simplified as the mixed Burgers-Korteweg-de Vries equation—the canonical equation of turbulence. The analysis of the Burgers-Korteweg-de Vries equation gives the criterion of transition. The physical meaning of the equations is briefly discussed. It shows that dissipation and dispersion coexist as two basic physical principles of turbulence. The development of dissipation is monotonic, describing the conversion of the kinetic turbulence energy into heat due to viscosity. Dispersion can be either positive or negative. It represents the energy transformation between the mean flow and the large and micro-eddies before the energy is finally dissipated into molecular heat. Positive dispersion corresponds to cascading down process and negative dispersion means collection of energy. The mechanism of intermittency and anisotropy, and the effects of noise and developing history on turbulence are also discussed.

A SIMPLE SPANWISE MIXING MODEL FOR TURBULENT DIFFUSION AND SECONDARY FLOWS IN MULTISTAGE AXIAL-FLOW COMPRESSORS

Li Shiming (*Tsinghua University*)

Chen Maozhang (*Beijing University of Aeronautics & Astronautics*)

ABSTRACT

Three kinds of coefficients are defined and introduced into the basic equations for meridional throughflow fields in multistage axial-flow compressors deduced by the authors which describe different kinds of spanwise mixing mechanism in a unified form. Then, a novel much simpler equation system is obtained without any unknown correlation terms included. It has been shown that these coefficients involve the full information of all the kinds of mixing mechanism. This novel equation system not only unifies the two analytical models for meridional throughflow with mixing which were presented by Adkins and Smith (1981) and Gallimore and Cumpsty (1986) respectively, but also makes the computations for multistage machines much easier. The calculations of the flow through multistage machines have been made by incorporating the new model into a