

湍流的通用物理方程

北京航空航天大学 高歌*

【摘要】 利用变形张量及摄动变形位移的点积分解湍流脉动速度, 并使用密度加权的侧偏系综平均方法取代 Reynolds 平均方法, 在不引入任何物理假设的情况下, 对 Navier-Stokes 方程进行平均。未知相关量在三阶精度上才出现, 截断之后, 获得具有二阶精度的封闭的湍流方程组。该方程组无相关量, 不引入任何经验系数, 无需构造任何湍流模型, 即可描述 $Ma < 3.6$ 流速的任意复杂湍流场并解释湍流的物理本质。本文仅对推导思路及方程组做概要介绍。

关键词: 湍流 通用方程 二阶精度

1 前言

1883 年 O. Reynolds 推出 Navier-Stokes 方程的平均方程; 1921 年 G. Taylor 引入相关概念, 1936 年提出各态历经假说。近代湍流理论及模型之研究, 基本上是在以上传统思想框架内进行的。湍流研究已近 110 周年, 但不封闭、通用模型方程等一些根本性的问题远未得到解决, 这就迫使人们重新根据湍流物理本质去探索 Reynolds 平均方法之外的新途径。Reynolds 平均方程中在二阶精度上出现未知相关量。本文使用的方法, 使脉动量的平均值不为零, 对脉动量分解后再进行平均, 使未知相关量出现在二阶精度之后, 从而获得了二阶精度的所有湍流项的精确表达式, 使寻找湍流通用方程的历史使命得以完成。

2 推导思路介绍

先讨论不可压湍流。N-S 方程在湍流时会给出无穷多组解 $s_i(v_i, p_i)$, $i = n \rightarrow \infty$ 。湍流研究的最关键的问题是找出能够描述湍流平均行为的方程, 以求得平均解 $\bar{s}(\bar{v}, \bar{p})$ 。为了推导湍流方程, 必须先介绍和引入以下几种概念和方法: (1) 解空间中的解盆域概念; (2) 解的离散概率加权平均及其与时间平均的关系; (3) 大、小二种时间尺度的划分; (4) 摄动状态下的受力比拟; (5) 脉动速度 v 的分解; (6) 可压流的密度加权速度。现分别介绍之。

2.1 解空间中的解盆域 (Basin of Solutions in the Solution Space)

N-S 方程组的每一组解 (v_i, p_i) 都在解空间占据一个点。在湍流场中一固定点 x 处, 每隔一个微小的时间间隔 Δt , 测量一次 (v, p) 值, 并把该值标定在解空间中, 当经过一个足够长的时间间隔 ΔT 后, 所有可能出现的解都标定在解空间上之后, 解空间中必形成一个完整的解的盆域。每个解空间点出现的概率是不同的, 盆域若是对称的, 则其中心最低点就是概率分布的中心 (平均数, 中位数和众数三者合一), 该中心对应的解即是 N-S 方程在 x 点的平均解 $\bar{s}(\bar{v}, \bar{p})$ 。若盆域不对称, 则只考虑平均数作为 N-S 方程在 x 点的平均解。

2. 2 解的平均数

在解盆域上, 随机变量 s 的概率分布的平均数 $\bar{s}$ 就是这个随机变量的数学期望:

设有 n 个 s 值 $s_1, s_2, \dots, s_n$, 每个 s_i 的权为 ω_i , 则其加权平均数

$$\bar{s} = \frac{\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2 + \dots + \omega_n s_n}{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i s_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \quad (1)$$

当 $n = \Delta T / \Delta t$ 时, 所得 $\bar{s}$ 值即是离散型的解的平均值。

如果令 $\Delta t \rightarrow 0$, 则 $n \rightarrow \infty$, 每个 s_i 值的权 ω_i 成为连续函数 $\omega(s)$, 则连续型随机变量 s 的数学期望由下面的加权平均数表示:

$$\bar{s} = \int_{-\infty}^{+\infty} s \omega(s) ds \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(s) ds \quad (2)$$

因为 s 随时间 t 而变, 是 t 的函数 $s(t)$, 则加权函数亦是 t 的函数, 加权平均数变为:

$$\bar{s} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \omega[s(t)] \frac{ds}{dt} dt \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} \omega[s(t)] \frac{ds}{dt} dt \quad (3)$$

当时间平移不变性成立时, 概率可定义为 $dt/ds = \omega$, 则有

$$\bar{s} = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt \quad (4)$$

由此可知, 当时间间隔 $\Delta t \rightarrow 0$, 时间平移不变性成立时, 解空间的解盆域上的离散型平均趋同于时间平均。本文将使用这种离散型加权平均。

2. 3 时间尺度 T, t 的确定

在湍流场一固定点 x 处, $N-S$ 方程给出无穷多组瞬时解, 只有在足够长的时间间隔 ΔT 内, 才能在解空间形成完整的解盆域, 呈现所有可能存在的解。因而 ΔT 可做为长时间标度上的最小可辨识的时间单位, 在小于 ΔT 的时间间隔内谈论湍流的平均值是毫无意义的, 因为短的时间不可能出现所有可能存在的解。因之, 湍流解的平均值的变动只能在 T 时标上进行, 在每一个 T 时刻, x 点上不同的湍流微团将经历所有可能存在的解, 即 $N-S$ 方程在解空间上将充满整个解盆域。形象比喻, 在 T 时标上拍照 x 点的最短曝光时间是 ΔT , 拍得的照片上所有可能的解都按一定的概率密度同时存在, 呈现类似于电子云的云雾状态, 出现概率大的地方, 云雾浓密。在 ΔT 时间, 解是各态历经的。

一个具体的湍流微团的变动过程是在小时间尺度的时标 t 上进行的, t 时标上能够辨识的最小时间尺度是 Δt 。在 t 时标上看 x 点的解盆域, 则只有一个解点 s_i 在盆域上窜动, 并在 ΔT 时间内按一定概率特性跑遍所有可能的位置。在 t 时标上拍照, 最小曝光时间是 Δt , 拍得的照片上只有相应于 t_i 时刻的一个解点 s_i 。

2. 4 摄动状态下的受力比拟

在 t 时标上的解点 s_i 在解盆域上不停地受到摄动, 变换位置, 具有 $s_i (v_i, p_i)$ 状态的流体微团必然会受到某种作用, 我们可比拟为摄动力作用, 在下一时刻变动到另一位置。

假定在 t_0 时刻的解 s_0 在 Δt 时间后变为 s_1 , 则 s_0 状态的单位质量流体受的力是 F_1 。若过程是逆向进行的, 则 s_1 状态的单位质量流体受力是 $-F_1$ 。

若测量次数足够多, 则必然有从 s_0 点变动到盆域上任意点 s_i 的可能性, 此时相应的摄动

力是 F_i 。

当 $i = n \rightarrow \infty$, 对 s_0 状态的单位质量流体变动到盆域上所有点的对应的摄动力 ΣF_i 进行平均, 得出的平均值 F_0 , 就是从 s_0 变动到盆域中心时真实流体所需的摄动力。

从 s_0 到平均解 $\bar{s}$, s_0 状态的单位质量流体受的摄动力是 F_0 , 若过程逆向进行, 从 $\bar{s}$ 点变动到 s_0 点, 则 $\bar{s}$ 状态的单位质量流体受到的摄动力是 $-F_0$ 。

用这种方法, 可以求出从 $\bar{s}$ 点变动到任意点 s_i 所需的力 $-F_i$ 。湍流状态在 ΔT 时间内, 可出现由 $\bar{s}$ 点变动到所有 s_i 点的机会, 对 $\Sigma -F_i$ 做平均, 就可得出 $\bar{s}$ 状态流体在 ΔT 时间内受到的平均作用力, 即平均湍流单位质量流体在 x 处受到的湍流 $-F$ 。

上述平均方法, 实质上是在 ΔT 时间内对具有同样初始条件和边界条件的大量实验结果所做的系综平均 (Ensemble Average)^[1], 可表达为

$$V' = V_0 + v_i', \quad V_i = V_0 + v_i' \quad (5)$$

$$\bar{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \quad (6)$$

$$\bar{V}' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (V_i - V_0) = \bar{V} - V_0 \neq 0 \quad (7)$$

对 $N-S$ 方程做普通离散加权平均, 有

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) \quad (8)$$

将上面得到的 $-F$ 代入上式, 则有

$$\frac{DV_i}{DT} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - F \quad (9)$$

具体的推导步骤将按上述思路进行。

对比可知, Reynolds 平均方法从平均值 $\bar{s}$ 出发, 令 $V = \bar{V} + v'$, 平均之后必然有 $\bar{v}' = 0$ 。而本文方法从偏离平均值的任一值 s_0 出发, $V = \bar{V} - v'$, 平均之后必有 $\bar{v}' \neq 0$ 。这样, 如在平均之前先分解脉动量 v' 就可使未知相关量在更高的阶次上才出现。这种平均方法可称之为: 侧偏系综平均 (Off-center ensemble average)。

2. 5 脉动量 v' 的分解

如果湍流场一点 x 处的脉动量及变形率张量已知, 可引入摄动变形位移 $\bar{\delta r}$, 令

$$v' = \nabla \bar{V} \cdot \bar{\delta r}$$

将变形率张量分解成对称的应变率张量 s_{ij} 及反对称的旋转张量 r_{ij} , 则有

$$v_i' = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta r_j = s_{ij} \delta r_j + r_{ij} \delta r_j \quad (10)$$

引用涡矢与旋转张量、交变张量的关系

$$\Omega = \mathbf{E}_{ijk} r_{kj} \quad \text{或} \quad r_{ij} = -\frac{1}{2} \Omega_k \mathbf{E}_{ijk}$$

则有

$$v' = \nabla \bar{V} \cdot \bar{\delta r} = \nabla \Phi + \frac{1}{2} \Omega \times \bar{\delta r} \quad (11)$$

式中 摄动应变速度 $\nabla \Phi = s_{ij} \delta r_j$

摄动旋转速度 $\frac{1}{2} (\Omega \times \bar{\delta r}) = r_{ij} \delta r_j$

利用上式即可把脉动速度分解。如需要更高阶精度, 可令 $V = \bar{V} - v' + v'' - v''' + \dots$, 对高阶速度脉动量依法分解即可。

2.6 可压流的密度加权速度

在推导可压流湍流方程时, 将引用作者修正后的 Favre 的密度加权速度概念^[1,2], 在侧偏系综平均时

$$\overline{p \mathbf{V}_i} = \overline{\rho \mathbf{V}_i}, \quad \overline{v_i'} \neq 0, \quad \overline{p v_i'} + \overline{\rho' \mathbf{V}_i} - \overline{\rho v_i'} = 0 \quad (12)$$

3 不可压流的湍流方程组

不可压流的湍流方程组如下:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{P} + \nu_e \nabla^2 \hat{\mathbf{V}} + (\bar{\mathbf{v}}' \cdot \nabla) \hat{\mathbf{V}} + \frac{\nu_e}{2} [\nabla (\bar{\delta \mathbf{r}} \cdot \nabla)] \times \hat{\Omega} \quad (13)$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial t} + \bar{u}_j' \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_e \left(\frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j'}{\partial x_i} \right) + \bar{u}_j' \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_e \delta r_m E_{ijk} \frac{\partial \hat{\Omega}_k}{\partial x_m} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}'}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}' = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P}' + \nu_e \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}' - (\bar{\mathbf{v}}' \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla K \quad (15)$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial t} + \bar{u}_j' \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\Phi}'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_e \left(\frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j'}{\partial x_i} \right) - \bar{u}_j' \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial K}{\partial x_i} \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{或} \quad \bar{u}_{kk} / \partial x_k = 0 \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}' = 0 \quad \text{或} \quad \bar{u}_{kk}' / \partial x_k = 0 \quad (18)$$

式中 $\mathbf{V}$ 、 P 、 ρ 是平均湍流参数, $\mathbf{V}'$ 、 P' 是平均脉动尺度参数, $\mathbf{V}$ 、 P 是均流均脉差参数。

$$\mathbf{V} = \mathbf{V} - \bar{\mathbf{v}}', \quad \hat{P} = P - \bar{p}', \quad \bar{\mathbf{v}}' = \nabla V \cdot \bar{\delta \mathbf{r}} = \nabla \Phi + \frac{1}{2} \hat{\Omega} \times \bar{\delta \mathbf{r}}, \quad \hat{\Omega} = -\nabla \times \mathbf{V}$$

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{V} - \nabla \Phi, \quad K = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'} \cong \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}' \cdot \bar{\mathbf{v}}', \quad \nu_e = \nu + \nu', \quad \nu' = -\nu \frac{\nabla^2 (\nabla \Phi)}{\nabla^2 \mathbf{V}}$$

4 可压流的湍流方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}^o}{\partial t} + (\mathbf{V}^o \cdot \nabla) \mathbf{V}^o = & -\frac{1}{\bar{p}} \nabla (\bar{P} - \bar{P}') + \nu_e \nabla^2 (\bar{\mathbf{V}} - \nabla \Phi) + (\bar{\mathbf{v}}^o' \cdot \nabla) (\bar{\mathbf{V}} - \nabla \Phi) \\ & + \frac{\nu_e}{2} [\nabla (\bar{\delta \mathbf{r}} \cdot \nabla)] \times \hat{\Omega} + \frac{\nu_e}{3} \nabla [\nabla \cdot (\bar{\mathbf{V}} - \nabla \Phi)] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{或} \quad \frac{\partial \bar{u}_i^o}{\partial t} + \bar{u}_j^o \frac{\partial \bar{u}_i^o}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_e \left(\frac{\partial \bar{u}_i^o}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^o}{\partial x_i} \right) + \bar{u}_j^o \frac{\partial \bar{u}_i^o}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\nu_e}{2} \bar{\delta r}_m E_{ijk} \frac{\partial \hat{\Omega}_k}{\partial x_m} \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_e \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_{kk}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}^o'}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}^o' = -\frac{1}{\bar{p}} \nabla \bar{P}' + \nu_e \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}^o' + \frac{\nu_e}{3} \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}^o') - (\bar{\mathbf{v}}^o' \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla K^o \quad (21)$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial \bar{u}_i^o}{\partial t} + \bar{u}_j^o \frac{\partial \bar{u}_i^o}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{\Phi}'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_e \left(\frac{\partial \bar{u}_i^o}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^o}{\partial x_i} \right) - \bar{u}_j^o \frac{\partial \bar{u}_i^o}{\partial x_j} + \frac{\partial K^o}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_e \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_{kk}^o}{\partial x_k} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \bar{p} \frac{\partial \bar{u}_{kk}}{\partial x_k} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \bar{p}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{p} \bar{u}_j' + \bar{p}' \bar{u}_j - \bar{p}' \bar{u}_j^o) = 0 \quad (24)$$

$$\bar{u}_i^o \frac{\partial \bar{u}_i^o}{\partial x_j} = Q + \frac{1}{\bar{p}} \left(\bar{p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\hat{\Phi}}{\bar{p}} + \bar{u}_j^o \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{h} - \bar{h}^o) \quad (25)$$

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{2} \mu_e \left[\left(\frac{\hat{\partial} \bar{u}}{\partial x_j} + \frac{\hat{\partial} \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\hat{\partial} \bar{u}_k}{\partial x_k} \right] \left(\frac{\bar{\partial} \bar{u}}{\partial x_j} + \frac{\bar{\partial} \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (26)$$

$$\frac{\bar{\partial} \bar{h}^o}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\bar{\partial} \bar{h}^o}{\partial x_j} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{\bar{\partial} \bar{\Phi}}{\partial t} + u_j \frac{\bar{\partial} \bar{\Phi}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\bar{\partial} \bar{P}}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda \frac{\bar{\partial} \bar{T}}{\partial x_j} + \frac{\bar{\Phi}}{\bar{\rho}} - \bar{u}_j' \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j} (\bar{h} - \bar{h}') \quad (27)$$

$$\bar{\Phi}' = \frac{1}{2} \mu_e \left[\left(\frac{\bar{\partial} \bar{u}'}{\partial x_j} + \frac{\bar{\partial} \bar{u}_j'}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\bar{\partial} \bar{u}_k'}{\partial x_k} \right] \left(\frac{\bar{\partial} \bar{u}'}{\partial x_j} + \frac{\bar{\partial} \bar{u}_j'}{\partial x_i} \right) \quad (28)$$

$$\bar{P} = \bar{\rho} R \bar{T}^o \quad (29)$$

$$\bar{p}' = R (\bar{p} \bar{T}' + \bar{p} \bar{T}' - \bar{p}' \bar{T}^o) \quad (30)$$

式中 $\bar{V}$ 、 $\bar{\rho}$ 、 $\bar{T}$ 、 $\bar{p}$ 、 $\bar{h}$ 是非密度加权平均湍流参数， V 、 P 、 T 、 ρ 、 h 是均流均脉差参数。 V' 、 $\bar{p}'$ 、 T' 、 $\bar{p}$ 是平均脉动尺度参数。

$$V = \bar{V} - \bar{v}', \quad P = \bar{P} - \bar{p}', \quad T = \bar{T} - T', \quad \rho = \bar{\rho} - \bar{p}'$$

$$\bar{v}' = \nabla V \cdot \bar{\partial} \bar{r} = \nabla \bar{\Phi} + \frac{1}{2} \hat{\Omega} \times \bar{\partial} \bar{r}, \quad \hat{\Omega} = - \nabla \times V, \quad \hat{V} = \bar{V} - \nabla \bar{\Phi}$$

$$\hat{P} = \bar{P} - \bar{p}', \quad v = v + v', \quad v' = - v \frac{\nabla^2 (\nabla \bar{\Phi})}{\nabla^2 V}, \quad K = \frac{1}{2} \overline{v' \cdot v'} \cong \frac{1}{2} \bar{v}' \cdot \bar{v}'$$

以上各参量加右上角标“o”后，则表示密度加权平均参量。密度加权平均参量与非密度加权平均参量之间的二阶精度关系为

$$V^o = V \left[1 - \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right], \quad \bar{v}^o = \bar{v} \left[1 - \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right], \quad T^o = T \left[1 - \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right], \quad T^o = T \left[1 - \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right]$$

附注：如欲提高 $Ma > 1$ 时的计算精度，(21) 式左侧第二项改为

$$(\bar{V} \cdot \nabla) \left[\bar{v}' + \frac{\bar{v}'' (2\bar{v}' - \bar{v}'')}{\bar{V}} + \dots \right]$$

可由 $\bar{v}''$ 、 $\bar{v}''$ 、 $\bar{v}'$ 替换 (21) 式中 $\bar{v}'$ 、 $\bar{v}''$ 、 $\bar{V}$ 的方程解出 $\bar{v}''$

5 未结束语

以上湍流方程组终结了百余年来湍流模型的研究历史，二阶精度范围内再也不需要模型了。以上方程即可在长时间标度上描述任意复杂平均湍流，也可在短时间标度上描述各尺度层次的结构现象。由此得出了如下结论：湍流问题可在 $N-S$ 方程范畴内用二阶侧偏系综平均得以解决；各态历经假说仅是在时、空均匀平移成立时对侧偏系综平均的一次线性近似；湍流的类似于分形的特性在短时间标度上受控于湍流通用物理方程，是方程短时标特性的具体表现。该方程统一湍流的统计及结构二大学派。以上结论已经得到有关数值计算、实验及工程应用的证明。湍流的各种物理现象的实质，包括各向异性，有组织结构、间歇性、湍流的能量逆转等，均可由上述方程的研究给出答案，这需要今后国内外湍流界同行的共同努力。

致谢：本研究的关键时刻，幸蒙盛晓永先生启迪，又得到吴礼义教授审查指正。特此深表谢忱！

参 考 文 献

- 1 Favre A. Je de Mécanique. 1965, (4): 361
- 2 Hinze J O. Turbulence. McGRAW-HILL Book Company, Second Edition, 1975, 5- 21