

一种设计亚音速叶型的解析方法

西北工业大学 刘 波 * *

【摘要】 本文在近似于势、流函数的正交面上采用解析方法进行亚音速叶型设计。将改写后的无旋条件与连续方程联立求解，可在计算面上将叶型设计问题用标准拉普拉斯方程来表示。这一方法的优点是在流场计算中用解析解取代数值迭代计算过程，求解简便，节省计算机时，并为从理论上分析各种不同叶型的设计特性提供了便利条件。文中提供的算例表明，方法是有效和可行的。

一、前 言

目前，采用给定叶片表面速度分布来设计叶型的反方法已取得显著进展。几种主要设计方法，如复特线法^[1]、势流函数法^[2,3]等均已成功地用于轴流压气机“可控扩散叶型”(CDA)设计，并取得较好的效果。此类方法的优点在于，通过合理选择叶片表面最佳速度分布，可以使叶型型面与气流参数之间达到最佳匹配，以避免叶片表面产生较强的激波和附面层分离。

本文的主要目的在于研究一种亚音速压气机叶型设计的解析方法，它能够根据给定的设计速度分布较快地获得对应的初始叶型形状，并为叶型的进一步优化设计及气动性能分析创造有利条件。为此，将二维定常无粘等熵流场的无旋条件改变形式，并与连续方程联立，在势、流函数计算面上将叶型设计问题用标准的拉普拉斯方程表示。在给定边界条件后，该方程是适定的，可用分离变量法得到流场气动参数的解析解。在求得气流角 θ 后，通过积分确定变换到物理平面上的流线坐标，从而求得设计叶型的几何形状。

这种用解析方法设计叶型的主要特点是：与文献 [2、3] 中采用的计算方法相比，在流场气动参数的求解中避免数值迭代计算的复杂过程，能够较迅速地得到设计叶型的初始轮廓，并为从理论上分析叶型表面设计速度分布及其它设计参数对叶型几何形状及气动性能的影响提供了方便。

二、叶型设计计算方法

在物理坐标系 (x, y) 下，二维定常无粘流动的连续方程和无旋条件为：

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0 \quad (1)$$

$$u_y - v_x = 0 \quad (2)$$

本文用如下方程来取代方程 (2)，即

$$(\rho u)_y - (\rho v)_x = 0 \quad (3)$$

方程 (3) 与 (2) 在不可压流动中是等价的, 对低速流动 ($Ma \leq 0.3$), 方程 (3) 与 (2) 近似等同, 对高速可压流动, 两者有所差别。将方程 (1)、(3) 组合成新的联立方程组, 设流动为等熵的, 并引入如下无量纲参数

$$\rho' = \rho / \rho^* = [1 - (k - 1) / (k + 1) \cdot \lambda^2]^{1/(k-1)}, \quad q' = q / q_{cr} = \lambda, \quad Q' = \rho \lambda$$

其中 $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ 为气流全速度, q_{cr} 为临界音速, λ 为速度系数, $k = 1.4$ 。由方程 (1)、(3) 定义的流函数和准势函数如下:

$$\psi_x = -Q' \sin \theta, \quad \psi_y = Q' \cos \theta, \quad \varphi_x = Q' \cos \theta, \quad \varphi_y = Q' \sin \theta$$

对势、流函数用 $\psi_1 = \rho_1' \lambda_1$ 无量纲化后有

$$\varphi' = \varphi / \psi_1, \quad \psi' = \psi / \psi_1$$

利用上述定义式和下面的坐标变换公式

$$\partial / \partial x' = Q' \cos \theta (\partial / \partial \varphi') - Q' \sin \theta (\partial / \partial \psi'), \quad \partial / \partial y' = Q' \sin \theta (\partial / \partial \varphi') + Q' \cos \theta (\partial / \partial \psi')$$

可将方程 (1)、(3) 变换为计算平面 (φ', ψ') 坐标系下的形式 (除去 $Q' = 0$ 的滞点外)

$$(\ln Q')_{\varphi'} + \theta_{\psi'} = 0, \quad (\ln Q')_{\psi'} - \theta_{\varphi'} = 0 \quad (4)$$

设 $Q = \ln Q'$, 消去气流角 θ , 辅之以边界条件后, 则描述叶型设计的定解问题为:

$$(\partial^2 Q / \partial \varphi'^2) + (\partial^2 Q / \partial \psi'^2) = 0 \quad (5)$$

$$Q|_{\varphi'=0} = Q_1, \quad Q|_{\varphi'=l} = Q_2, \quad Q|_{\psi'=0} = Q_s(\varphi'), \quad Q|_{\psi'=1} = Q_p(\varphi')$$

这里 $Q_1 = \ln \rho_1' \lambda_1$, $Q_2 = \ln \rho_2' \lambda_2$, l 为下游出口站 φ' 值, 而 $Q_s(\varphi')$, $Q_p(\varphi')$ 分别为求解域下边界和上边界速度系数 λ 分布的函数。

此类定解问题可用分离变量法求解, 最终得到的解函数为:

$$Q(\varphi', \psi') = Q_1 + \frac{Q_2 - Q_1}{l} \varphi' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh}(n\pi/l)} \left[k_n \text{sh} \frac{n\pi\psi'}{l} + h_n \text{sh} \frac{n\pi}{l} (1 - \psi') \right] \sin \frac{n\pi}{l} \varphi' \quad (6)$$

$$h_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ Q_s(\varphi') - Q_1 - \frac{Q_2 - Q_1}{l} \varphi' \right\} \sin \frac{n\pi}{l} \varphi' d\varphi'$$

$$k_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ Q_p(\varphi') - Q_1 - \frac{Q_2 - Q_1}{l} \varphi' \right\} \sin \frac{n\pi}{l} \varphi' d\varphi'$$

系数 h_n 和 k_n 的求解关键在于被积函数中 $Q_s(\varphi')$ 和 $Q_p(\varphi')$ 的函数关系如何给定, 本文采取的做法如下:

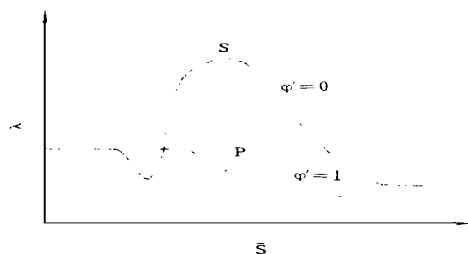


图 1 上、下边界滞止流线分布

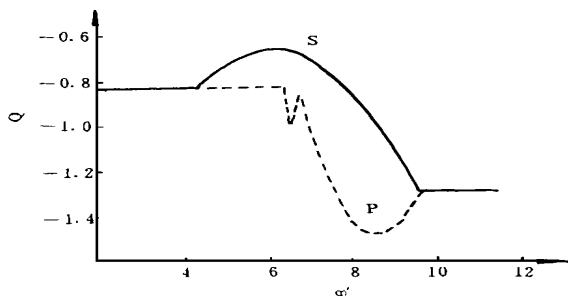


图 2 气动参数 Q 沿上、下边界分布

如图 1 所示, 根据设计时给定的速度系数沿上、下边界滞止流线的分布, 得到 $Q_s(\varphi')$, $Q_p(\varphi')$ 的分布函数, 然后采用分段抛物拟合的方法 (见图 2), 在各分段区域得到

$Q_s(\varphi')$ 和 $Q_p(\varphi')$ 的函数关系, 即

$$[Q_s(\varphi')]_i = A_{si}\varphi_s'^2 + B_{si}\varphi_s' + C_{si}, \quad [Q_p(\varphi')]_i = A_{pi}\varphi_p'^2 + B_{pi}\varphi_p' + C_{pi}$$

这里 $i = 1, 2, \dots, m$, m 为分段区域的数目。将各段区域上 $Q_s(\varphi')$, $Q_p(\varphi')$ 的函数关系中诸系数确定后, 便可积分求出系数 h_n , k_n 如下:

$$h_n = \frac{2}{n\pi} \left[\left(\sum_{i=1}^m H_i \right) - Q_1 - Q_2(-1)^n \right] \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$H_i = \left[\frac{2A_{si}l^2}{n^2\pi^2} - (A_{si}\varphi_s'^2 + B_{si}\varphi_s' + C_{si}) \cos \frac{n\pi}{l}\varphi_s' + \frac{l}{n\pi} (2A_{si}\varphi_s' + B_{si}) \sin \frac{n\pi}{l}\varphi_s' \right]_{\varphi_{si-1}'}^{\varphi_{si}'}$$

$$k_n = \frac{2}{n\pi} \left[\left(\sum_{i=1}^m K_i \right) - Q_1 - Q_2(-1)^n \right] \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$K_i = \left[\frac{2A_{pi}l^2}{n^2\pi^2} - (A_{pi}\varphi_p'^2 + B_{pi}\varphi_p' + C_{pi}) \cos \frac{n\pi}{l}\varphi_p' + \frac{n\pi}{l} (2A_{pi}\varphi_p' + B_{pi}) \sin \frac{n\pi}{l}\varphi_p' \right]_{\varphi_{pi-1}'}^{\varphi_{pi}'}$$

根据系数 h_n 和 k_n 的表达式, 我们可对解函数的求解过程说明如下

在每条流线上 ($\psi' = c$), 解由无穷多正弦波叠加构成, 其幅值为:

$$A_n = \{ k_n \text{sh}(n\pi\psi'/l) + h_n \text{sh}[(n\pi/l)(1-\psi')] \} / \text{sh}(n\pi/l)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $A_n \rightarrow 0$, 这说明高阶正弦波的幅值越来越小, 对解施加的影响也愈弱, 这样当 n 足够大时, 可用有限项之和来近似代替无穷级数之和。

在求得叶栅流场中各点气动参数 Q 值后, 可借助 (4)、(5) 两式得到气流角度场, 有

$$\theta(\varphi') = \int_{\varphi=c}^{\varphi'} \left[\frac{\partial Q}{\partial \psi} \right] d\varphi', \quad \theta(\psi') = \int_{\psi=c}^{\psi'} \left[\frac{\partial Q}{\partial \varphi} \right] d\psi' \quad (7)$$

叶栅流场的无量纲物理坐标求解公式如下:

$$X' = \psi_1 \int_{\varphi=c}^{\varphi'} (\cos\theta/Q') d\varphi' = -\psi_1 \int_{\psi=c}^{\psi'} (\sin\theta/Q') d\psi' \quad (8)$$

$$Y' = \psi_1 \int_{\psi=c}^{\psi'} (\sin\theta/Q') d\psi' = \psi_1 \int_{\varphi=c}^{\varphi'} (\cos\theta/Q') d\varphi' \quad (9)$$

三、算例与讨论

根据给定的叶型设计参数和叶型表面速度系数 λ 的分布 (见图 1), 编制了相应的叶型设计程序。为了验证本方法设计叶型的精度和适用范围, 本文设计了两套叶型叶栅。

算例一: 低速大弯度压气机叶型 其设计参数为: $\lambda_1 = 0.486$, $\lambda_2 = 0.286$, $\theta_1 = 64.47^\circ$, $\theta_2 = -9.07^\circ$, 轴向速度密度 $\Omega = 1.44$, 稠度 $\sigma = 1.924$ 。

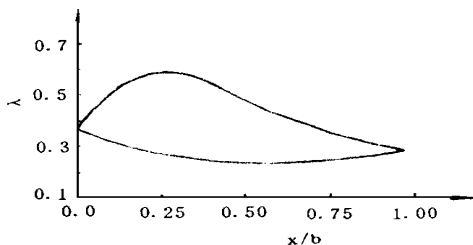


图 3 叶型表面设计速度系数分布

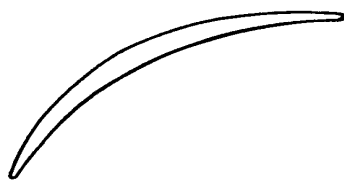


图 4 叶型轮廓

选定的叶型设计速度系数分布见图 3, 该叶型设计进口速度系数 $\lambda_1 = 0.486$, 气流转折

角约为 74° ，负荷较大，其叶背速度峰值约为 $\lambda_{s, \max} = 0.60$ ，位于 25 % 弦长处，取计算网格为 100×11 ， $n = 250$ ，所设计的叶型几何形状如图 4 所示。

算例二：高亚音速压气机叶型 其设计参数为： $\lambda_1 = 0.701$ ， $\lambda_2 = 0.592$ ， $\theta_1 = 45^\circ$ ， $\theta_2 = 8.9^\circ$ ， $\Omega = 1.226$ ， $\sigma = 1.354$ 。

叶型设计速度系数分布见图 5，叶背速度峰值为 $\lambda_{s, \max} = 0.89$ ，位于约 20 % 弦长处，设计的叶型轮廓如图 6 所示。与用文献 [3] 方法设计的叶型对比，两者吻合程度较好。

图 7 中给出了计算流场气动参数 Q 时，级数求和的项数 n 对计算精度的影响。分别取 $n = 250$ 和 $n = 500$ 时，计算的 Q 值之差 $|\Delta Q|_{\max}$ 仅为 10^{-4} 左右，因此，在计算 Q 时，取 $n = 250$ 便可保证一定的设计精度。

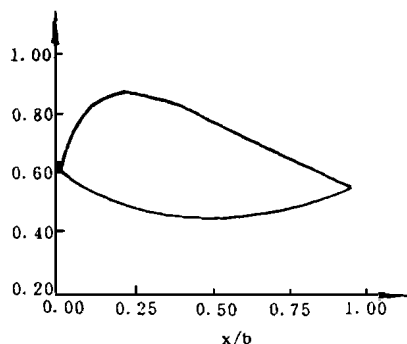


图 5 表面速度系数分布

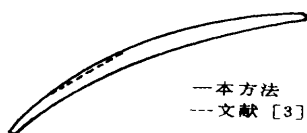


图 6 叶型形状及对比

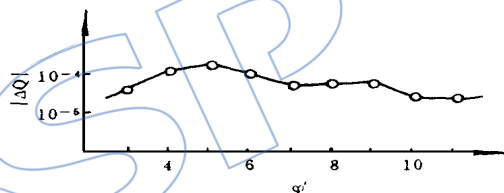


图 7 Q 值之差 $|\Delta Q| = |Q_{n=500} - Q_{n=250}|$ 沿流向分布

以上提供的两个设计计算例表明：本文发展的在近似于势、流函数的正交面上设计叶型的解析方法是可行的，它具有求解过程简便，易于编程等优点，能够较快地获得压气机叶型初始设计结果，并有利于从理论上分析设计条件对叶型型面生成的综合影响。文中提供的两个算例均针对亚音速设计条件，对于跨音速叶型设计，由于用方程 (3) 取代无旋条件在高速流动中有较大偏差，因此本方法仅适于在亚音速范围内应用。

参 考 文 献

- [1] Korn D., "Numerical Design of Transonic Cascade", ERDA Research and Development Report Cor-3077-72, Jan, 1975.
- [2] Schmidt E., "Computation of Supercritical Compressor and Turbine Cascade with a Design Method for Transonic Flow", Trans. of the ASME, Vol. 102, 1980.
- [3] 刘波, "流—势函数法的人工密度格式在叶型设计中的应用", 航空动力学报, Vol. 3, No. 3, 1988.

blades in the aeroengine to expand its range of stable operation.

ANALYTICAL METHOD FOR SUBSONIC CASCADE PROFILE

Liu Bo (Northwestern Polytechnical University)

ABSTRACT

A method of subsonic cascade design for axial-flow compressor is provided as follows. The equations of continuity and quasi-irrotationality are transformed into the potential-stream function coordinates. Then a Laplace equation can be deduced for an aerodynamic parameter "Q". The boundary conditions thereby are given as the distributions of velocity coefficients on the stagnation streamlines of both suction and pressure sides of a flow channel. The flow field is obtained from the analytical solution of the Laplace equation. Subsequently the field is turned back into the physical plane by differentiation and integration. Then the blade profile coordinates and the geometry of the cascade result from this analysis. The method has an advantage over other inverse methods in the fact that the flow field parameter "Q" can be easily obtained from the analytical solution of the Laplace equation instead of the numerical solution of a complex differential equation. So the method is easy to be programmed and to save computing time. To illustrate the validity of the design method, two compressor stator blade profile with subsonic inlet Mach number were designed and compared with the method presented in ref. [3]. The good agreement between the two methods show the applicability of this method.

AN EXPERIMENTAL STUDY OF 3-D FLOW IN A CASCADE

Ji Chunjun, Zhu Zhuguo, Liu Qianzhi, Zhou Xinhai

(Northwestern Polytechnical University)

ABSTRACT

An experimental investigation of three-dimensional flow in a cascade has been accomplished by means of flow visualization and detailed measurements, and also compared with the predictions of fully three-dimensional inviscid flow calculation. The experimental measurements of the three-dimensional flow in a highly cambered compressor cascade with nonplanar end wall reveal the distributions of flow parameters on blade surfaces and the whole flowfield in cascade channel. In comparison with the two-dimensional cascade measurements for the same blade section, the results show that the influence of the end wall shape changing on the flow is not confined to the vicinity of end walls, and can extend to the whole field when the aspect ratio of blading is small. The comparison between the experimental data and the computational results confirms that the inviscid flow calculation can predict the major features of three-dimensional flow in cascades. The flow visualization reveals the formation and development of vortex systems in the cascade passage, end wall and corner regions, which serve as a visualized information to understand the phenomena of complicated secondary flow in cascades. The experimental measurements provide a reliable basis to perfect the flow models, to investigate the mechanism of spanwise mixing in a cascade and to testify the capabilities of fully three-dimensional cascade flow calculation methods.

STABILITY ANALYSIS OF A RIGID ROTOR ON SFDB WITHOUT A CENTRALIZING SPRING

Zhang Jiaxin and Xue Zhongqing (Northwestern Polytechnical University)

ABSTRACT

The stable nonsynchronous responses and the stability of motion of a rigid rotor supported on squeeze-film damper bearings (SFDB) without a centralizing spring are studied by means of harmonic balance method. The motion of the system is approximately simulated by two coupled