

榫头/榫槽接触问题边界元分析

南京航空学院 温卫东* 高德平

【摘要】 本文用增量理论建立了二维弹性接触问题的边界元法方程, 讨论了求解接触问题过程中的一些具体做法。文中分别对盘/片组件的燕尾型与枞树型榫头与榫槽的接触应力作了数值分析。与有限元及光弹试验结果对比表明, 边界元法的结果是令人满意的。

一、前言

边界元法不仅使求解问题的维数降低一维, 从而减少数据准备工作量, 提高计算效率, 而且可以直接求得结构边界上的应力等参数, 从而提高结果数值的精度。文献 [1、2] 分别对二维弹性和弹塑性接触问题的边界元法作了研究。文献 [3] 研究了三维弹性接触问题的边界元法。但迄今为止, 边界元法对于工程接触问题的研究报导甚少, 尤其对榫头/榫槽类的工程接触问题的研究报导则更少。本文的目的在于推广边界元法在工程接触问题中的应用, 针对典型的燕尾形与枞树形的榫头/榫槽类接触问题, 展开研究与讨论。

二、接触问题的边界元方程及求解过程

对二维弹性问题, 若用增量法, 则相应的边界积分方程为^[4]

$$\int_{\Gamma} p_{lk}^* \Delta u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* \Delta p_k d\Gamma \quad (1)$$

其中 p_{lk}^* 和 u_{lk}^* 分别是面力和位移的基本解; Δu_k 和 Δp_k 为边界 Γ 上的位移与面力增量。

如图 1 所示, 设 A 、 B 两物体的接触边界为 Γ_c , 其余边界为 Γ_{A-C} 和 Γ_{B-C} 。在边界上任一点 j 处, 引入局部坐标系 $\eta_j \eta_c$ 。 η_1 为 j 点处的边界外法向, η_2 为边界的切向。那么, 绝对坐标系 $x_1 j x_2$ 与局部坐标系 $\eta_j \eta_c$ 之间的变换关系为

$$\{x\}_j = [\theta]_j \{\eta\}_j = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \epsilon \cdot \theta & \cos\theta \end{bmatrix}_j \{\eta\}_j \quad (2)$$

$$\{\Delta u\}_j = [\theta]_j \{\Delta v\}_j, \quad \{\Delta p\}_j = [\theta]_j \{\Delta q\}_j \quad (3)$$

其中 Δv 和 Δq 分别为局部坐标系中的位移和面力增量。

考虑接触时, 必须引入下列接触关系。设 $\Gamma_c = \Gamma_a + \Gamma_s$, Γ_a 为粘着接触边界, 则有

$$\Gamma_a: \begin{cases} \Delta q_1^A - \Delta q_1^B = 0 & \Delta q_2^A - \Delta q_2^B = 0 & q_1^A < 0 \\ v_2^A + v_2^B = 0 & v_1^A - v_1^B = 0 & q_1^B < 0 \end{cases} \quad (4)$$

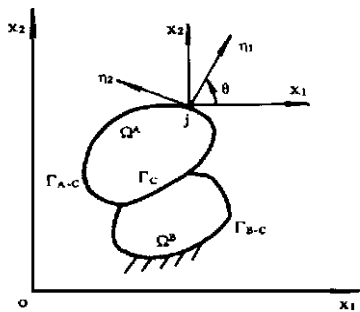


图 1 绝对与局部坐标关系

对于 Γ_s 边界, 在 (4) 式中再增加条件: $q^A = \pm \mu q^B$, $q^B = \pm \mu q^A$ 。其中 μ 为摩擦系数, v_1^0 为两物体接触点之间的初始距离。

利用 (1) ~ (4) 式, 并将积分边界 Γ 离散成 N 个常值单元, 则可得到下列矩阵形式的求解接触问题的边界元方程:

$$\sum_{j=1}^N \left[\begin{array}{cccc|ccc} H_{ij}^{A-C} & H_{ij}^{A-a} & H_{i1}^A & H_{i2}^A & 0 & -G_{ij}^A & -[G_{ij}^A \pm \mu G_{i2}^A] & 0 \\ 0 & -H_{ij}^B & -H_{i1}^B & 0 & H_{ij}^{B-C} & -G_{ij}^B & -[G_{ij}^B \pm \mu G_{i2}^B] & H_{i2}^B \end{array} \right] \times [\Delta v_j^{A-C} \quad \Delta v_j^a \quad \Delta v_1^s \quad \Delta v_2^s \quad \Delta v_j^{B-C} \quad \Delta q_j^a \quad \Delta q_1^s \quad \Delta v_2^s]^T$$

$$= \sum_{j=1}^N \left[\begin{array}{ccc|ccc} G_{ij}^{A-C} & -H_{i1}^A & G_{i2}^{A-C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{ij}^{B-C} & -H_{i1}^B & G_{i2}^B \end{array} \right] [\Delta q_j^{B-C} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \Delta q_j^{B-C} \quad v_1^{0,n} \quad 0]^T \quad (5)$$

其中 $H_{ij} = \int_j [p^*][\Theta] d\Gamma$, $G_{ij} = \int_j [u^*][\Theta] d\Gamma$; H_{i1} 和 H_{i2} 分别表示 H_{ij} 矩阵中的第 1 列和第 2 列矩阵, 同样 G_{i1} 和 G_{i2} 有类似的意义, 上标 $A-C$ 表示 A 物上的 Γ_{A-C} 边界, 上标 $B-C$ 表示类似意义, $v_1^{0,n} = v_1^0 - v_1^{A,n-1} - v_1^{B,n-1}$, $n-1$ 表示第 $n-1$ 步迭代。(5) 式即为任何一步增量载荷时, 第 n 步迭代的接触方程。如果用全量 v 、 q 及 v_1^0 分别替代 Δv 、 Δq 及 $v_1^{0,n}$, 则 (5) 式变为全量迭代求解接触问题的方程。在接触区 Γ_c 内, 设任意一对接触点对 A 和 B , 选其法线方向为: $\hat{n}^A = -\hat{n}^B = (n^A - n^B) / (|n^A - n^B|)$, 其中 n^A 和 n^B 分别为 A 、 B 点接触前的边界外法向。若 $\hat{n}$ 与 x_1 轴夹角为 β , 则存在接触后的变换矩阵 $[\beta]$ (其表达式与 $[\Theta]$ 相似)。那么, (1) 原未接触的单元, 若 $v_1^{0,n} \leq 0$, 进入新的接触边界, 相应矩阵作如下处理: $\hat{G}_{ij} = G_{ij}[\Theta]^{-1}[\beta]$, $\hat{H}_{ij} = H_{ij}[\Theta]^{-1}[\beta]$ 。否则, 保持原状态。(2) 原已接触的单元, 若 $q_1^A = q_1^B \geq 0$, 进入新的脱离接触, 相应矩阵作如下处理: $\hat{G}_{ij} = \hat{G}_{ij}[\beta]^{-1}[\Theta]$, $\hat{H}_{ij} = \hat{H}_{ij}[\beta]^{-1}[\Theta]$ 。否则, 保持原状态。(3) 当原是粘着接触的单元, 若 $|q^2| \geq |\mu q^1|$, 为滑动接触; $|q^2| < |\mu q^1|$, 保持原状态。(4) 当原是滑动接触的单元, 若 $|v_2^B + v_2^A| \leq \epsilon$, 为粘着接触; 否则, 保持原状态。其中 ϵ 为给定的精度值, 理论上讲, 当粘着接触时, 有 $\epsilon = 0$ 。 μ 前正负号可根据摩擦力与运动方向相反原则而定。

三、数值分析

1. 燕尾形榫头接触状态下的应力分析 某发动机第 1 级压气机叶片的燕尾型榫头与榫槽的边界元与有限元模型如图 2 所示。在图中, 边界上的号码为边界元的划分点号。当转速为

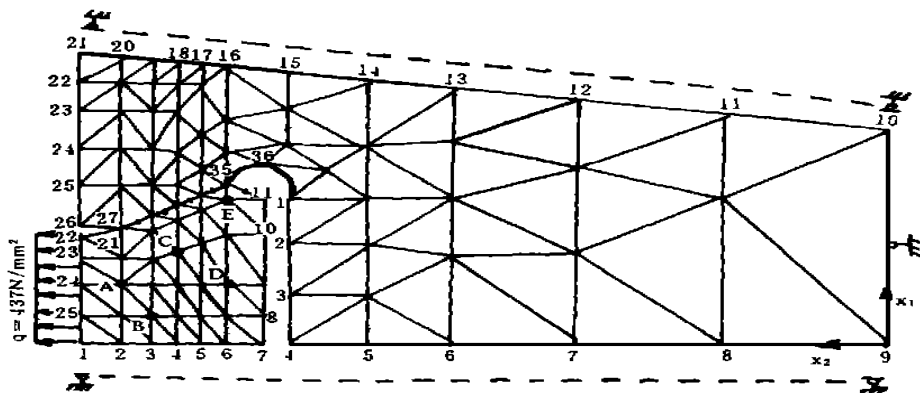


图 2 燕尾榫头/榫槽的边界元、有限元模型

11150r/min 时, 叶身及榫头的离心力简化到叶根处的均布拉力 q 。榫头材料 E 为 196GPa, ν 为 0.295, 榫槽部分的材料 E 为 209GPa, ν 为 0.295。

当用边界元计算时, 榫头边界分成 25 个常单元, 即 25 个节点, 榫槽边界分成 36 个常单元, 即 36 个节点, 其中接触边界上分成 8 个常单元。当用有限元计算时, 选用 6 节点等参单元, 并将榫头分成 56 个单元, 132 个节点; 榫槽部分分成 90 个单元, 211 个节点。

表 1 为平面应力状态, 取摩擦系数 $\mu=0$ 时, 有限元与边界元的数值结果, 相应的接触边界上的当量应力 σ_d 分布如图 3 所示。图 3 中的横坐标为接触边界的长度, 原点在接触边界的上端 (上起点)。从表 1 和图 3 的结果可看出, 边界元与有限元的结果吻合较好。在计算上述结果时, 用边界元法仅花了 IBM 4341 的 CPU 约 5 分钟, 而有限元法则用了约 30 分钟。

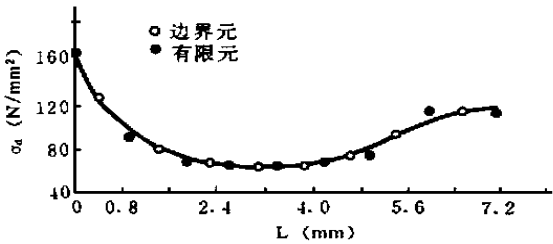


图3 沿榫头接触边界上的当量应力分布

表 1 榫头内部点的应力数值结果 (单位: N/mm^2)

点号	有 限 元				边 界 元			
	σ_1	σ_2	τ_{12}	σ_d	σ_1	σ_2	τ_{12}	σ_d
A	187.3	374.8	133.7	398.7	179.3	367.6	131.4	391.4
B	429.9	300.9	132.3	44.5	419.2	307.1	130.6	438.7
C	676.5	246.7	323.1	815.4	722.1	262.3	330.3	853.3
D	989.7	180.6	320.4	1068.3	1033.5	190.1	325.7	1097.2
E	673.5	126.4	435.8	975.2	705.3	137.2	437.9	1042.8

2. 纵树型榫头/榫槽的接触状态应力分析 某发动机涡轮叶片的榫头/榫槽部分的边界元模型如图 4 所示。图中将榫头边界分成 91 个常单元, 轮缘榫槽部分的边界分成 104 个常单

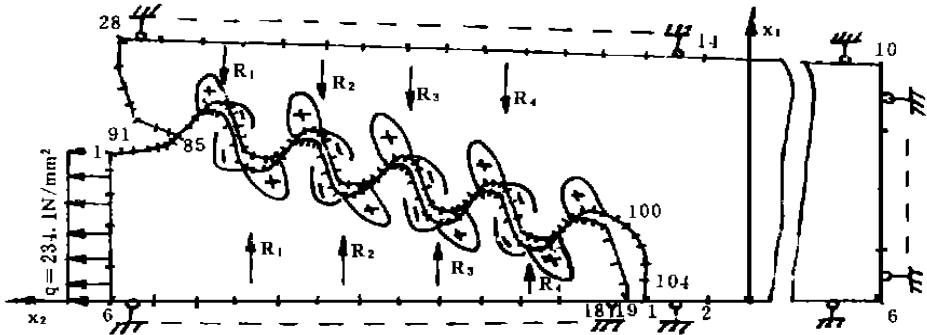


图 4 纵树形榫头/榫槽的边界元模型

元。在转速为 11930r/min 下, 将叶身和榫头的离心力简化为叶根处的均布力 q 。榫头材料的剪切模量 $G=84\text{MPa}$, $\nu=0.28$; 榫槽材料的 $G=83.8\text{MPa}$, $\nu=0.35$ 。

在平面应力状态, 并取摩擦系数 $\mu=0.3$ 时, 用边界元计算的榫头齿根及榫槽齿根处的最大应力值见表 2。相应的应力分布示意图 4。

表 2 榫头/ 榫槽齿根最大应力值比较 (单位: MPa)

最 大 应 力	榫 头 齿 根				榫 槽 齿 根			
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄
边界元	781. 50	711. 87	687. 11	418. 69	783. 55	737. 07	698. 96	612. 38
光弹试验 ^[5]	850	740	620	410	851	794	737	567
误差 (%)	8. 058	3. 801	10. 824	2. 120	7. 93	7. 17	5. 16	8. 00

从表 2 看出, 边界元的结果与光弹试验结果的误差保持在工程误差范围内, 考虑到光弹试验结果的试验误差, 因此, 上述边界元的结果是令人满意。

四、结 论

1. 用边界元求解榫头/ 榫槽的接触问题, 能获得较好的数值结果。它与有限元法相比, 不仅数据准备简单, 而且能以较少的单元离散数目获得相同量级精度的结果, 并大大减少计算时间。
2. 由于边界元法能直接求得边界上的应力及对结构内部点取舍的任意性, 从而更有利于分析了解接触问题。

参 考 文 献

[1] Andersson T. , "The Boundary Element Method Applied to Two-Dimensional Contact Problems with Frictions ", Boundary Element Methods of the 3th Int. Seminar, Irine, California, July, 1981.

[2] 陆山, "用边界元—数学规则解弹塑性接触问题", 航空学报, Vol. 6, No. 6, pp. 548 ~ 555, 1985。

[3] Gao D. P. , Wen W. D. , "Boundary Element Method Applied to 3-D Elastic Contact Problems with Frictions ", Proc. Third Japan- China Symposium on Boundary Element Methods, April, Tokyo, Japan, 1990.

[4] Andersson T. , "The Boundary Element Method Applied to Two-Dimensioal Contact Problems ", Progress in Boundary Element Methods, Vol. 2 (Edt. C. A. Brebbia), Pentech Press, 1983, pp. 136-139.

[5] 孙鹏等, "某发动机高压涡轮盘叶片榫头连接光弹应力分析报告", 011 第二设计所资料。

fringe pattern, it is possible to subtract two time average pattern at any given frequency. In result, the fringe pattern is obtained with high visibility but only valid at the given frequency. A phase shifting technique is adopted to overcome this shortcoming. A time average image is put into processor and frame store (renewed and put into processor per 40ms), then a subsequent image with a phase shift of $\Delta\Phi$ resulted from sinusoidal modulation in object beam is recorded and subtracted from the first image. This method is similar to modulation of light intensity function of speckle pattern. The advantage of this method is the capabilities of obtaining real time fringe pattern of vibration with high resolution and of performing frequency scanning at a wide range. Its application to the vibration pattern measurement of disk-blade coupling in an aeroengine is a great success.

ANALYSIS OF TENON AND MORTISE CONTACT PROBLEMS BY BOUNDARY ELEMENT METHODS

Wen Weidong and Gao Deping

(Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing 210016)

ABSTRACT

The boundary element equations of 2-D elastic contact problems are established by the incremental principle and some concrete approaches to solution of the contact procedure are considered. The contact stresses of the dove tail and the pine tree joints of the disk/blade assembly are numerically analyzed. From the comparison of the numerical results of boundary element methods (BEM) with those of FEM and photoelasticity experiments it is concluded that the results of BEM are satisfactory in contrast with FEM, the BEM not only simplifies data preparation but also gives the results of the same accuracy level with fewer discrete elements and saves the computer time tremendously.

A COMPOUND FATIGUE INVESTIGATION OF PLATE SPECIMEN UNDER LOW-CYCLE LOAD SUPERPOSED ON HIGH CYCLE LOAD

Xu Fengjing, Nie Jingxu, Zhao Changzhan

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT

According to real operating conditions of turbine-engine blades in service, a series of combination tests of various load matching and frequency matching for plate specimens was carried out on the compound fatigue testing rig which can simulate operating loads on the blades. From the test results and theoretical analyses, some characteristics and the regularities of this compound fatigue are obtained. A new method of life prediction for this compound fatigue is presented in this paper. The calculated results of this method are in good agreement with the experiments.

RESEARCH ON DAMAGE TOLERANCE OF COMPRESSOR BLADE

Zheng Guanghua, Yu Juanhong, Hou Guichang

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT

This paper describes the damage tolerance analysis of compressor blade by fracture mechanics. Finite element method with 20-nodes solid elements is used for the stress calculation. A displacement method is provided to determine the stress intensity factors K_I , K_{II} and K_{III} versus crack length a of the blade. Based on the material toughness