

Box 法用于三维边界层计算的 数值稳定性分析

北京航空航天大学 祖国君** 陈矛章

【摘要】 本文对 Box 法用于三维边界层计算的数值稳定性做了 Neuman 分析, 并借助于数值计算, 证实了目前公认的一些稳定性问题和三维边界层计算中所发现的现象, 得到了一些有参考价值的结论。

关键词: 三维边界层 数值稳定性 BOX 法

1 计算中发现的数值稳定性问题

在用 Box 法进行三维边界层计算时发现, 当 $W_e > 0$ 时, 数值方法并不是无条件稳定的。作为对算法和程序的验证, 我们首先对一个最典型的 (平板上放一圆柱) 边界层问题进行了计算^[1], 并证明我们的计算方法和程序是正确的。

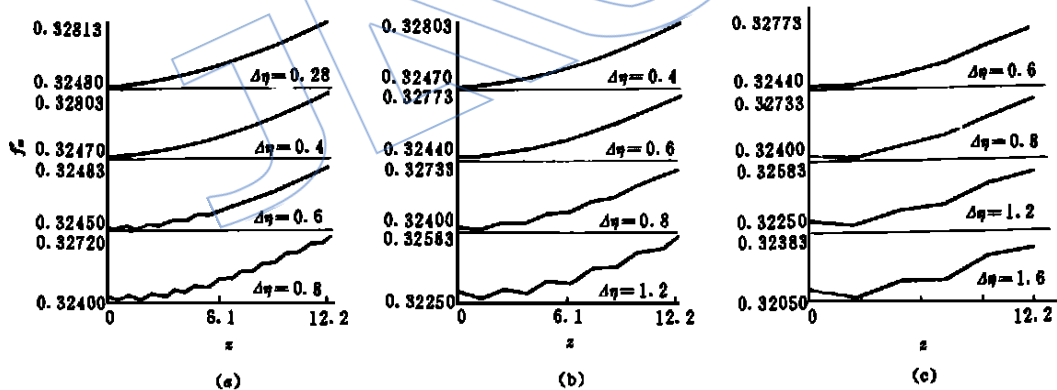


图 1 f''_w 沿 z 向变化

我们给出如下几组计算结果: (1) 给定 $x = \Delta z = 0.61$, 分别选取 $\eta = 0.28, 0.4, 0.6$ 和 0.8 , 记录 $x = 4.88$ 处无量速度梯度 f''_w 沿 z 向的变化; (2) 加大 x 和 z , 取 $x = z = 1.22$, 分别计算 $\eta = 0.4, 0.6, 0.8, 1.2$, 同样给出 $x = 4.88$ 处 f''_w 沿 z 向的变化; (3) 进一步增大 x 和 z , 使 $x = z = 2.44$, 选取 $\eta = 0.6, 0.8, 1.2, 1.6$; 结果见图 1。(4) 考察不同的 x 处 f''_w 沿 z 向的变化, 给定 $x = z = 4.88$, 计算 $\eta = 0.8$ 的情况, 结果见图 2 (a. $x = 4.88\text{cm}$, b. $x = 14.64\text{cm}$, c. $x = 24.4\text{cm}$)。

这些计算揭示了如下的一些现象: 第一, 即使 $W_e > 0$, 用 Box 法求解三维边界层方程也并不是无条件稳定的; 第二, 单从提高稳定性考虑, 减小 η 和适当加大 x 和 z 是有利的; 第三, 在不同的壁面位置稳定性有所变化, 计算越向前推进, 稳定性问题也就越明显。这样就可以确切地说, 三维 Box 法的稳定性是有条件的。

2 稳定性分析

为使问题简化, 又不失一般性, 我们分析笛卡尔坐标系中的三维不可压定常层流边界层方程的 Box 法的稳定性, 并对动量方程给出如下的模型方程:

$$u_0(\partial u / \partial x) + v_0(\partial u / \partial y) + w_0(\partial u / \partial z) = \nu(\partial^2 u / \partial y^2)$$

(1)

其中 u_0 、 v_0 、 w_0 分别为 x 、 y 、 z 方向速度分量在当地的冻结值。对图 3 所示的网格, 按照 Box 法中心差分的思想离散方程 (1) 中的偏导数, 并代入该方程中, 就得到基本的差分方程:

$$\begin{aligned} & a_1 u_{i+1,j,k} + a_2 u_{i+1,j+1,k} + a_3 u_{i+1,j,k+1} + a_4 u_{i+1,j+1,k+1} + a_5 u_{i,j,k} \\ & + a_6 u_{i,j+1,k} + a_7 u_{i,j,k+1} + a_8 u_{i,j+1,k+1} + a_9 (u_{i,j+2,k} + u_{i,j+2,k+1} \\ & + u_{i+1,j+2,k} + u_{i+1,j+2,k+1} + u_{i,j-1,k} + u_{i,j-1,k+1} + u_{i+1,j-1,k} \\ & + u_{i+1,j-1,k+1}) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

其中:

$$a_1 = \frac{u_0}{4} \frac{1}{x} - \frac{v_0}{4} \frac{1}{y} - \frac{w_0}{4} \frac{1}{z} + \frac{\nu}{8} \frac{1}{y^2} \quad a_2 = \frac{u_0}{4} \frac{1}{x} + \frac{v_0}{4} \frac{1}{y} - \frac{w_0}{4} \frac{1}{z} + \frac{\nu}{8} \frac{1}{y^2}$$

$$a_3 = a_4 = \frac{u_0}{4} \frac{1}{x} - \frac{v_0}{4} \frac{1}{y} + \frac{w_0}{4} \frac{1}{z} + \frac{\nu}{8} \frac{1}{y^2}$$

$$a_5 = a_6 = \frac{u_0}{4} \frac{1}{x} - \frac{v_0}{4} \frac{1}{y} - \frac{w_0}{4} \frac{1}{z} + \frac{\nu}{8} \frac{1}{y^2}$$

$$a_7 = a_8 = \frac{u_0}{4} \frac{1}{x} - \frac{v_0}{4} \frac{1}{y} + \frac{w_0}{4} \frac{1}{z} + \frac{\nu}{8} \frac{1}{y^2} \quad a_9 = -\frac{\nu}{8} \frac{1}{y^2}$$

按照 Von Naumann 稳定性分析的思想, 考虑到 Box 法的特点, 把速度解 u 的每个 Fourier 分量写成:

$$u_{i,k,j} = \hat{u}_{i+m,k+n} e^{I(j+l)\theta}, \quad u_{i+m,k+n,j+l} = \hat{u}_{i+m,k+n} e^{I(j+l)\theta} \quad (3)$$

其中 m 、 n 、 l 分别可取 -1 、 0 、 1 、 2 ; θ 是相位角, $\theta = \alpha y$; α 是波数, $\alpha = 2\pi/\lambda$, λ 为 y 向波长; $I = -1$; u 是 u 的振幅。将 (3) 式代入差分方程 (2) 中, 得到三维情况下放大因子 G 的表达式:

$$\hat{G} = \hat{u}_{i+1,k+1} / \hat{u}_{i,k} = (b_1/b_2) G_1 - b_3/b_2 - (b_4/b_2) G_2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{其中: } G_1 &= \hat{u}_{i+1,k} / \hat{u}_{i,k}, \quad G_2 = \hat{u}_{i,k+1} / \hat{u}_{i,k}, \quad b_1 = a_1 + a_2 e^{I\theta} + a_9 e^{12\theta} + a_9 e^{-I\theta} \\ b_2 &= a_3 + a_4 e^{I\theta} + a_9 e^{12\theta} + a_9 e^{-I\theta}, \quad b_3 = a_5 + a_6 e^{I\theta} + a_9 e^{12\theta} + a_9 e^{-I\theta}, \quad b_4 = a_7 + a_8 e^{I\theta} + a_9 e^{12\theta} + a_9 e^{-I\theta} \end{aligned}$$

显然 G_1 、 G_2 分别对应 x 、 z 方向参量的变化。 G_1 可以理解为某一个分量的幅度在 x 方向的变化, 可称为 x 方向的放大因子, 但与二维情况下的意义不同。按照 (3) 式的思想, 定义: $u_{i,k,j} = u e^{I(j+l)\theta}$, 其中 θ 、 θ 分别表示 y 和 z 向的相位角。同产生 G 的过程一样, 容易得到:

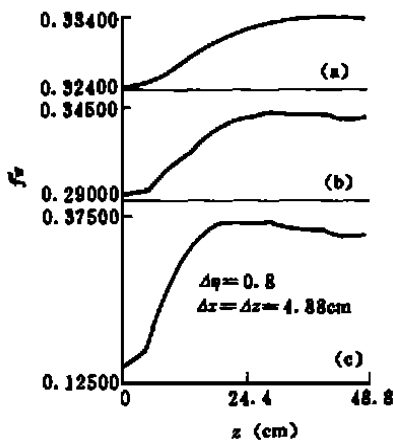


图 2 不同流向位置处 f_w'' 沿 z 向变化

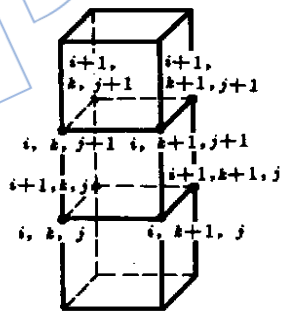


图 3 差分格式

$$G_1 = - \frac{\cos \frac{\theta_y}{2} \cdot \cos \frac{\theta_z}{2} \left[-\alpha + 2\alpha_4 \sin^2 \frac{\theta_z}{2} \right] + I \left[\alpha_2 \cos \frac{\theta_y}{2} \cdot \sin \frac{\theta_z}{2} + \alpha_3 \sin \frac{\theta_y}{2} \cdot \cos \frac{\theta_z}{2} \right]}{\cos \frac{\theta_y}{2} \cdot \cos \frac{\theta_z}{2} \left[\alpha_1 + 2\alpha_4 \sin^2 \frac{\theta_z}{2} \right] + I \left[\alpha_2 \cos \frac{\theta_y}{2} \cdot \sin \frac{\theta_z}{2} + \alpha_3 \sin \frac{\theta_y}{2} \cdot \cos \frac{\theta_z}{2} \right]} \quad (5)$$

其中: $\alpha_1 = u^0 / x$, $\alpha_2 = w^0 / z$, $\alpha_3 = v^0 / y$, $\alpha_4 = v^0 / y^2$
因此, 要使 $|G_1| \leq 1$ 对任意的 θ_y 和 θ_z 都成立, 就要求 $\alpha \geq 0$, 即 $u^0 / x \geq 0$ 。
同理, 定义 $\hat{u}_{ijk,j} = \hat{u}_{ik} e^{i(j\theta_y + i\theta_x)}$, 得到:

$$G_2 = - \frac{\cos \frac{\theta_y}{2} \cdot \cos \frac{\theta_z}{2} \left[-\alpha + 2\alpha_4 \sin^2 \frac{\theta_z}{2} \right] + I \left[\alpha_2 \cos \frac{\theta_y}{2} \cdot \sin \frac{\theta_z}{2} + \alpha_3 \sin \frac{\theta_y}{2} \cdot \cos \frac{\theta_z}{2} \right]}{\cos \frac{\theta_y}{2} \cdot \cos \frac{\theta_z}{2} \left[\alpha_1 + 2\alpha_4 \sin^2 \frac{\theta_z}{2} \right] + I \left[\alpha_2 \cos \frac{\theta_y}{2} \cdot \sin \frac{\theta_z}{2} + \alpha_3 \sin \frac{\theta_y}{2} \cdot \cos \frac{\theta_z}{2} \right]} \quad (6)$$

从中可以得到: 只有 $w^0 / z \geq 0$, 才能使得 $|G_2| \leq 1$ 对任意的 θ_y 和 θ_z 都成立。这也就从理论上解释了: 当沿 z 向的推进方向与流动方向相反时, 应用 *Box* 法会出现数值不稳定。
即使满足了 $|G_1| \leq 1$ 和 $|G_2| \leq 1$ 的条件, 在 (4) 式中, 由于各种因素的综合作用, 也不能得出 $|G| \leq 1$ 无条件成立的结论。同时, 由于在数学上对 (4) 式的处理非常复杂, 无法得到解析的稳定性准则, 因此用数值计算的办法对这个稳定性问题进行分析。

3 计算结果与分析

在给定了流场和网格参数的情况下, 通过 (4) 式可算出任意的 θ_y (即 θ) 和 θ_z ($\theta = \theta_z$) 对应的放大因子 G 。取最大的放大因子 G_{max} , 得到如下的数值分析结果: (1) 首先研究了 G_{max} 与 η (η 为法向 y 变换后的坐标) 的依赖关系。图 4 给出了在 $x = 4.88, z = 2.44cm$ 处, G_{max} 随 η 的变化, 其中 $\bar{x} = \bar{z} = 0.61cm$ 。图 4 说明, 在很小的 η 时, G_{max} 接近于 1; 随着 η 增加, G_{max} 不断增大, 意味着边界层计算会趋于不稳定。这与边界层计算结果 (图 1 (a)) 是一致的。(2) 同样的计算条件下, 使 $w^0 / z < 0$, 从图 5 的结果中可以看出, 即使 η 非常小, 其放大因子也是非常大的, 从而造成严重的数值不稳定。这一结果同目前公认的结论 ($We < 0$ 时, 计算不稳定) 是一

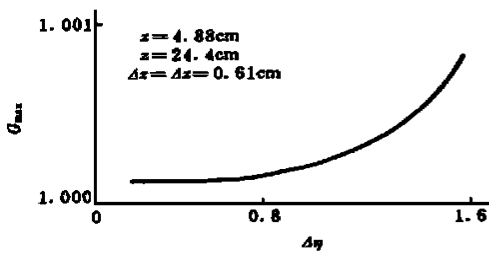


图 4 G_{max} 随 $\Delta\eta$ 的变化

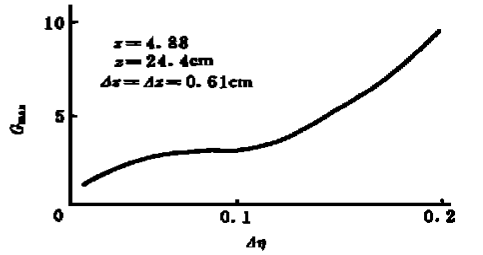


图 5 $\alpha_2 < 0$ 时 G_{max} 随 $\Delta\eta$ 的变化

致的。(3) 再考察一下不同位置处 G_{max} 的变化, 见图 6。其结果显示当 x 增大时, G_{max} 增大, 边界层计算的稳定性下降, 这与用 *Box* 进行边界层计算时所发现的现象是一致的。我们知道, 稳定性除与当地参数有关外, 推进过程所积累的误差也有一定影响。(4) 图 7 表示的是 G_{max} 随 x ($z = x$) 的变化。从中可以看出, 随着 x (z) 增加, G_{max} 有时会增大。但这并不意味着边界层计算的稳定性下降, 因为按照 *Neuman* 稳定性分析的思想, 要使差分格式稳

定, 必须使放大因子 $|G| \leq 1$, 或保持有界, 即要求: $|G| \leq 1 + O(x, z)$ 。也就是说, 若 $x(z)$ 增大, 则稳定性的限制变弱。

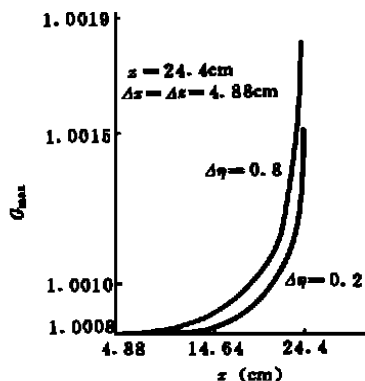


图 6 $G_{\max}$ 沿 x 向的变化

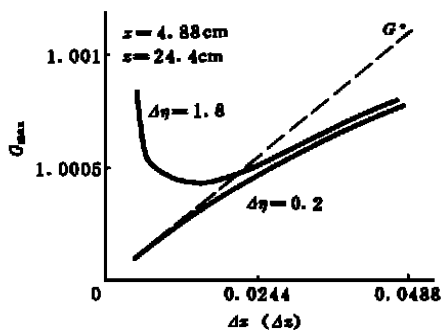


图 7 $G_{\max}$ 随 $\Delta x (\Delta z)$ 的变化

为了更好地说明问题, 定义临界放大因子 $G^* = 1 + O(x, z)$, 则稳定性限制为 $|G| \leq G^*$ 。

在图 7 中, 假设 G^* 曲线与 $\eta = 0.2$ 的 $G_{\max}$ 曲线在 $x = z = 0.61$ 处相交。那么随着 $x(z)$ 增大, G^* 线性增加, $\eta = 0.2$ 所对应的 $G_{\max}$ 线处于 G^* 下方, 且差距越来越大, 边界层计算也就越稳定。但对于较大的 η , 如 $\eta = 1.6$, 则只有 $x = z > 2.44$, 才能使 $G_{\max} \leq G^*$ 。

上述的讨论说明, 在某些情况下, 增大 x 和 z , 具有与减小 η 同样的使边界层计算趋于稳定的作用。这与在边界层计算中所发现的现象 (对比图 1) 是一致的。

4 结 论

通过对 Box 法所进行的 Neumann 分析和数值计算分析, 得到了如下的基本结论: (1) 用 Box 法进行三维边界层计算时, 当 (横向) 推进方向与 (横向) 流动方向相反时, 算法是不稳定的; (2) 即使推进方向与流动方向相同, 差分格式也不象二维那样具有无条件稳定性, 这里网格的选取对其稳定性有直接的影响, 减小壁面法向网格间距以及在某些情况下增大平行于壁面的网格间距都有助于提高计算的稳定性; (3) 在不同的位置, 稳定性也有不同的表现。

参 考 文 献

- 1 祖国君, 陈矛章. 旋转叶片上的三维附面层. 航空动力学报, 1988, 3 (2): 181

EFFECTS OF ROTATION ON 3-D BOUNDARY LAYER

Zu Guojun and Chen Maozhang

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT

The basic effects of rotation have been surveyed in this paper. On the basis of theoretical analysis of three-dimensional rotational incompressible boundary layer equations, the effects of centrifugal force, coriolis force and normal pressure gradients ($\partial p / \partial x^2 \neq 0$) due to rotation on the calculational results of these equations have been discussed in detail. The turbulent boundary layers on compressor rotor blades and on a rotating cylinder surface have been calculated as numerical examples. The results are consistent with the phenomena revealed in experiments. As a conclusion, the authors proposed that the coriolis force and the centrifugal force should be considered in the engineering computations of rotational problems and the normal pressure gradients are of great importance also in this case.

NUMERICAL STABILITY ANALYSIS IN 3-D BOUNDARY LAYER CALCULATION WITH BOX METHOD

Zu Guojun and Chen Maozhang

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT

The authors have proved that the Box method is unstable in three-dimensional boundary layer calculation although it is stable in two-dimensional boundary layer calculations. The Neumann stability analysis method has been applied to dealing with this problem. But the stability equation obtained is too complex to solve analytically, so the numerical computations have been proposed, and some valuable conclusions have been drawn. The results are in accordance with the phenomena that occurred in three-dimensional boundary layer calculations with Box method.

LIMIT POINT FLOW MODE ANALYSIS OF EXHAUST DIFFUSER AND OPERATION CHARACTERISTICS OF INJECTOR

Zhang Guozheng (*Gas Turbine Establishment of China*)

ABSTRACT

This paper analyzes the great effect of injection transfer characteristics on limit point operation parameters in an injector and flow character of injected flow according to injector limit point data measured in tests of Science Foundation Subject No. 24001. The actual flow mode at injector limit point is presented. The paper also analyzes the impassability of limit expansion ratio for the injector and the reason why the limit expansion ratio calculated from the injector engineering method is much less than its value obtained from the tests. The existing conclusion that "the injector limit expansion ratio is the highest possible pressure ratio" is refuted by the theoretical demonstration and injector operation characteristics measured in tests. It is proved that the operational expansion ratio can be increased much beyond the limit expansion ratio when the injector absorbs injection transfer mass. The "Operation test characteristics of injector" from low expansion ratio to high expansion ratio beyond the limit expansion ratio is first accomplished.