

机械可靠性分析的等效威布尔分布法^{*}

西北工业大学 吴立言^{**} 刘 更 王步瀛

【摘要】 本文提出了拟纯概率法思想,并建立了等效威布尔分布法。由于威布尔分布可呈现多种分布形态,因而能克服目前在机械可靠性分析中常用的等效正态分布法的局限性,更合理地描述机械可靠性分析中的各类随机量。

一、拟纯概率法思想

由于目前可靠性工作的基础还较差,缺乏必要的统计数据,因此在分析机械可靠性时不得不依赖于一定的假设。这就是近似概率法在机械可靠性技术中得以广泛应用的原因。从发展的观点看,可靠性技术应向着能精确计算零件失效概率的纯概率法方向发展。但要能充分准确地描述各随机量的概率模型,必须依赖于长期的可靠性实践,积累可靠性数据和发展相应的理论。从目前的可靠性水平看,真正实现用纯概率法进行机械可靠性分析是很困难的,但介于近似概率法与纯概率法间的方法——拟纯概率法是可能实现的,是很有必要的。本文力图建立拟纯概率法思想,提出实施技术。

目前应用的近似概率法是基于假设各随机量服从正态分布,当已知某随机量服从某非正态分布时,为方便计算也将其等效为正态分布。因此该法又称等效正态分布法^[1]。这种正态化的处理,除了有一定的物理意义外,主要考虑到计算方便。

正态分布是一种呈对称形态的分布。实践中确有许多物理量不服从正态分布,而是服从某种偏态分布(正偏或负偏)。近似概率法中对随机量的正态化处理,当这些随机量的分布呈对称或近似对称形态时是具有意义的。但随机量实为明显偏态分布时,再作正态化处理将有相当的误差。这是现用近似概率法的不足之一。另外正态模型是一种可在正负无穷大范围内取值的分布模型,机械中的强度、载荷实际上不可能真正服从正态分布。

为了能对服从各类分布(对称的和偏态的)随机量进行充分地概率描述,考虑推断联合分布的方便,可采用某统一模型。该模型应既能描述对称分布的又能描述非对称分布的随机量,并兼顾强度、载荷的非负或非无穷大,从而比现用的近似概率法更准确地预测机械的可靠性。这样做当然仍未脱离近似概率法,但确在向着“对随机量进行充分地概率描述”的方向——纯概率法方向发展。这就是拟纯概率法思想。

二、关于威布尔分布

威布尔分布的失效概率密度函数为:

$$f(x) = \{x - x_0\}^{\beta-1} \exp\{-\{x - x_0\}/\eta\}^{\beta} \beta/\eta \quad (1)$$

式中 $\beta (> 0)$ 为形状参数; $\eta (> 0)$ 为尺度参数; x_0 为位置参数; $x (\geq x_0)$ 为随机变量。式 (1) 所表达的是三参数威布尔分布, 其分布曲线的形态取决于三个参数 η 、 β 和 x_0 。形状参数 β 和尺度参数 η 对威布尔分布的影响如图 1 和图 2 所示。

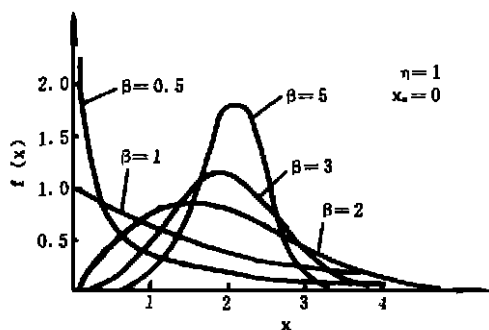


图 1 β 对分布形态的影响

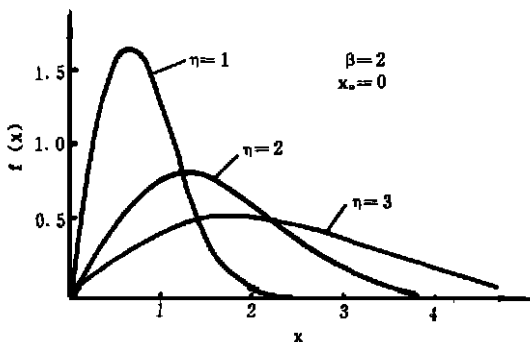


图 2 η 对分布形态的影响

由图可见, β 取值不同, 所描述的分布有不同的形状, 可以是对称的或偏态的。 η 值的大小会起到放大或缩小 x 标尺的作用。而 x_0 实际上是随机量的最小值, 与机械的最短寿命和最小强度等概念相吻合。

事实上, $\beta=1$ 时, 威布尔分布函数与指数分布函数一致; $\beta=2$ 时, 威布尔分布成为瑞利分布; $\beta=3\sim 4$ 时, 分布形态近似对称; 特别是 $\beta=3.602$ 时, 分布的偏度为零, 成为对称分布; 随着 β 值的增大, 分布形态由正偏态过渡到负偏态, 只要恰当选择威布尔三参数, 还可以满意地拟合对数正态分布, Γ 分布和 β 分布。这些都是在机械可靠性分析中常遇到的概率模型。由此分析, 选威布尔分布来研究拟纯概率法是合适的。实际上, 威布尔分布的提出是基于描述材料薄弱环节发生失效的概率模型。因此, 将其用于机械可靠性分析中是有明确物理意义的。

三、等效威布尔分布法

在可靠性分析中应用威布尔分布有许多优点, 若将其用于拟纯概率法中, 则所有随机量将被设为服从威布尔分布。由前分析可知, 这一假设对某些分布是精确成立的, 而对另一些分析, 只要参数选取合适, 可使该假设具有较高的可信度。我们称在该假设基础上建立起来的可靠性分析法为等效威布尔分布法。

1. 已知分布时等效威布尔分布的求解 设服从式 (1) 表示的威布尔分布的随机量 x 的均值和方差分别为 $E(x)$ 和 $D(x)$, 则有

$$E(x) = \int_{x_0}^{\infty} x f(x) dx, \quad D(x) = \int_{x_0}^{\infty} [x - E(x)]^2 f(x) dx$$

将式 (1) 代入上两式后可得

$$E(x) = x_0 + \eta \Gamma(1 + 1/\beta) \quad (2)$$

$$D(x) = \eta^2 \{ \Gamma(2/\beta + 1) - [\Gamma(1/\beta + 1)]^2 \} \quad (3)$$

式中 $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数。

若令 $\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx = 1 - e^{-1} = 0.632$ 时的 $x = x_t$, 则有

$$x_o = x_i - \eta \quad (4)$$

式中 x_i 称为威布尔分布的特征点。将式 (2) ~ (4) 整理可得

$$D(x) [\Gamma(1/\beta) - \beta]^2 - [E(x) - x_i]^2 [2\beta\Gamma(2/\beta) - \Gamma^2(1/\beta)] = 0 \quad (5)$$

$$\eta - [E(x) - x_i] / [\Gamma(1/\beta) / \beta - 1] = 0 \quad (6)$$

$$\eta + x_o - x_i = 0 \quad (7)$$

如果已知某随机量服从威布尔分布, 并知其均值、方差及特征点, 则可由式 (5) ~ (7) 解出其三参数 η 、 β 及 x_o 。若某随机量为非威布尔分布, 但可求得 $E(x)$ 、 $D(x)$ 和 x_i , 则式 (5) ~ (7) 就成为求该随机量等效威布尔三参数的方程。

由于等效威布尔分布与原分布是经三个方程约束后等效的, 并且威布尔分布可以呈现对称的或偏态的分布; 而等效正态分布与原分布仅经二个方程约束后等效, 且正态分布只能描述对称分布, 因此等效威布尔分布一定比等效正态分布更精确地等效原分布。

2. 已知试验数据求等效威布尔分布方法介绍 由于威布尔分布对各种机械强度的试验数据有很强的拟合能力, 因此可以对各种试验数据优先用威布尔分布来拟合, 估计其威布尔分布参数。具体方法有: (1) 威布尔概率纸法^[2], 这种方法简单, 可估计三个参数, 但精度低; (2) 最好线性不变估计 (BLIE)^[3]; (3) 最好线性无偏估计 (BLUE)^[3]; (4) 简单线性无偏估计 (GLUE)^[3], 这三种方法是应用可靠性数表的参数估计法, 有较高的精度且使用方便, 但只适于对二参数 (β, η) 的估计; (5) 最小二乘法^[4], 适于对二参数威布尔分布的估计。

如果试验数据不适合直接进行威布尔拟合, 则可由数据先估计其均值 $E(x)$ 、方差 $D(x)$ 及特征点 x_i , 再由式 (5) ~ (7) 求等效威布尔参数。

四、算 例

1. 已知某零件受到载荷 p (服从 Gumbel 分布), 其概率密度函数为

$$g(p) = \exp\{-\exp[-\alpha(p-u)] - \alpha(p-u)\} \alpha \quad (8)$$

式中 $\alpha = 1.2825$ (kN), $u = 3.5499$ (kN), 求 p 的等效威布尔分布。

服从 Gumbel 分布随机量的均值与方差为^[5]

$$E(p) = u + 0.57722/\alpha = 3.99997, \quad D(p) = \pi/(\sqrt{6}\alpha) = 1.00008$$

由式 (8) 可求出 $p_i = -\ln(-\ln 0.632)/\alpha + u = 4.15763$ 。将上述数据代入式 (5) ~ (7) 可求得: $\eta = 1.62488$, $\beta = 1.49688$, $p_o = 2.53275$

对应于上述 Gumbel 分布的等效正态分布函数为^[5]: $n(p) = \exp\{-[p - \mu]^2/(\sigma^2 2\pi)\}$ 。其中 $\sigma = 1.14$, $\mu = 3.752$ 。

Gumbel 密度函数 $g(p)$ 与其等效威布尔密度函数 $w(p)$ 及等效正态密度函数 $n(p)$ 的图形如图 3 所示。由图 3 可见, 本文提出的等效威布尔分布比等效正态分布更好地等效了原分布。

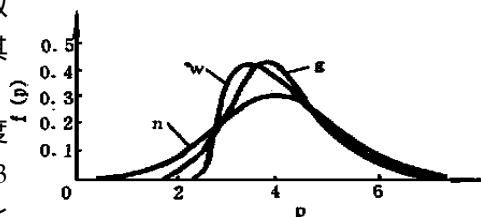


图 3 Gumbel 分布与其等效分布

2. 用等效威布尔分布法计算某零件的可靠度。

该零件的疲劳强度 r 服从威布尔分布, 参数为 $\eta = 300$, $\beta = 3$, $r_o = 500$, 作用在该零件上随机载荷所引起的应力 s 服从正态分布, 应力均值 $E(s) = 492$, 标准差 $\sigma_s = 39.4$ 。

(1) 先求应力 s 的等效威布尔分布参数

$E(s) = 492, D(s) = \sigma_s^2 = 39.4^2$, 对于正态分布有 $s_t = E(s) + 0.3375\sigma_s = 505.2975$ 。将上述数据代入式(5) ~ (7) 可得: $\eta_s = 126.678, \beta_s = 3.15387, s_0 = 378.62$ 。

(2) 计算可靠度

应力、强度均为威布尔分布时可靠度计算方法见文献[6], 代入本题数据, 计算得零件可靠度为 0.99988。而用等效正态分布法^[4]和直接对原分布进行数值计算得到的可靠度值分别为 0.99860 和 0.99950。对应三种计算方法的分布干涉图见图 4~6。

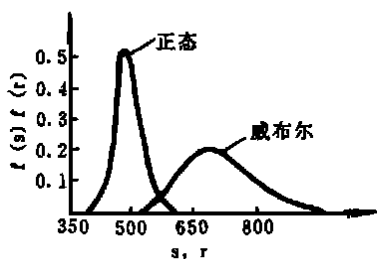


图4 原分布干涉图

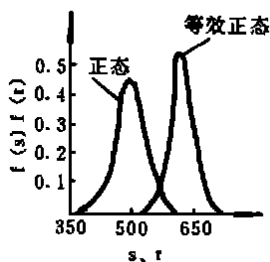


图5 等效正态分布干涉图

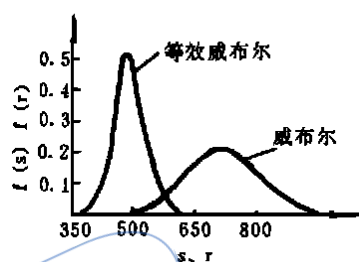


图6 等效威布尔分布干涉图

若认为数值计算的结果最精确, 则等效威布尔分布法解此题的相对误差为 0.012%, 低于用等效正态分布法的误差 0.09%。这一点在图 4~6 中也可表明。

五、结论与讨论

本文从拟纯概率法思想出发, 提出了可靠性分析中的等效威布尔分布法。由于威布尔分布可呈现多种分布形态, 因而能比正态分布更为有效地等效机械可靠性分析中常见的概率分布, 从而可更精确地预测机械产品的可靠性。这一点对于有高可靠性要求的航空机械产品的可靠性技术更具有意义。在等效威布尔参数估计中, 本文给出的由均值、方差和特征点来求等效威布尔参数的方法, 概念清楚, 精度较高, 使用方便。

虽然等效正态分布法有其局限性, 但由几个正态分布线性迭加后的概率模型仍为正态分布。因此可方便地获得几个基本随机量的联合分布。这正是目前等效正态分布法被广泛采用的一个原因。而在等效威布尔分布法中问题并非如此简单。可以说, 如何由几个威布尔分布的随机量来推断它们的联合分布的问题, 是等效威布尔分布法推广应用前应研究解决的问题。

参 考 文 献

- [1] 卢玉明, “通用的可靠度算法—等效正态分布法”, 机械设计, 1987年1月。
- [2] K. C. 卡帕, “工程设计中的可靠性”, 机械工业出版社, 1984年。
- [3] 四机部标准所, “可靠性试验用表”, 国防工业出版社, 1979年。
- [4] 卢玉明, “机械零件的可靠性设计”, 高等教育出版社, 1989年。
- [5] P. 索夫特—克里斯坦森, “结构可靠性理论及其应用”, 科学出版社, 1988年。
- [6] 潘国平, “应力强度服从威布尔分布的强度可靠度实用工程算法”, 机械强度, 1984年1月。

COMPREHENSIVE CONDITION MONITORING OF GEAR OPERATION

Wang Tong, Gao Xueguan, Qiu Liangheng
(*Shanghai Jiaotong University*)

ABSTRACT

The comprehensive condition monitoring has been proposed by the authors with six kinds of condition monitoring methods: temperature, vibration, noise, ferrography, infrared spectrum and surface roughness. The research on combined application of these methods has been conducted on a gear test machine (Type CL-100) to develop the technique, method, theory and application of the comprehensive condition monitoring. The comprehensive condition monitoring research is integrated with the pull life experiment. Some of primary experimental results given in this paper show that the comprehensive condition monitoring with the various methods is much better than that only with one or two methods, especially for monitoring all forms of machine component surface damage such as pitting, wearing and so on.

AN EQUIVALENT WEIBULL DISTRIBUTION METHOD FOR MECHANICAL RELIABILITY ANALYSIS

Wu Lian, Liu Geng, Wang Buyang
(*Northwestern Polytechnical University*)

ABSTRACT

A new reliability analysis method is presented which is called quasi-pure-probabilistic method (QPPM). On the basis of the present method, equivalent Weibull distribution method (EWM) is established for the reliability analysis of machine elements. Weibull distribution can express different distribution forms, so it is a more suitable method to describe random parameters with different distribution forms in mechanical reliability analysis. The calculation accuracy of the EWM is higher than that of the equivalent normal distribution method (ENM) in reliability prediction. The present method is intelligible in concept, convenient in use, and has more important significance for reliability prediction of mechanical products with higher reliability requirements.

PREDICATION OF FASTENING CAPACITY OF SCREWED JOINT STRUCTURE WITH CONE ASSEMBLY

Dong Benhan and Gao Pengfei
(*Shenyang Aeroengine Research Institute*)

ABSTRACT

Assembly and cone assemble are employed between jointed parts for meeting the requirement of self-centring. The fastening capacity of rotator screwed joint with cone assembly can not be calculated according to traditional method, because it is not only related to elastical deformation of jointed parts but also to friction condition and slide condition between contact cone surface under simulation conditions of the geometry and assembly technique. A model test has been conducted to research the mechanical behaviour of the jointed parts in assembling and loading process. The load-deformation relation of jointed parts reveals the difference between the plane assembly and the cone assembly. The relation of the former is linear and that of the latter nonlinear. In this research the loose condition of joint structure was defined experimentally as that the strain of cone parts equals to zero and the correlated load is named for loose load (or bearing capacity). Based on the test results the cone assembly jointed structure increases loose load owing to the friction factor. We have