

用有限元法分析接触问题的一种新的力学模型及计算方法*

航空航天部 628 所 何君毅**

【摘要】 阐明了用有限元法计算物体接触问题的一种新的力学模型:主动接触体网格中一个节点与被动接触体单元中任意点相接触的模型,放弃了过去常用的节点对模型,为网格划分带来了便利。在这种模型下,给出了粘式、摩擦滑移、开式等接触边界条件。按照修正势能原理导出了对称的接触控制方程,可求解接触体具有非线性的静态/动态的接触问题。本文给出了在一次求解迭代后判断各节点新的接触状态的方法,可进一步决定是否和如何修改接触控制方程。

关键词: 有限元法 物体接触问题 力学模型 控制方程 接触条件判断准则

1 前言

本文放弃了节点对概念,采用了点面接触的力学模型。当两物体相互接触时,为了方便,指定其中之一为主动体(它不允许是刚体),另一物体为被动体(它可为刚体)。本法出发点是,研究主动体一个接触节点与被动体面上任何一点(不一定是网格节点)相接触时情况,以建立力学计算模型。由于采用这种模型,主动与被动接触面可自由划分网格,在经过一定处理后,可使滑移接触的控制方程成为对称,为求解带来极大便利。继而用修正势能原理导出最后控制方程。以上优点是明显的,可求解大型实际工程问题。

在建立方程时,采用如下基本条件与假设:(1)主动体内任何节点不允许在被动体内(不允许材料复盖),但对被动体无此限制。(2)两接触体在接触面上的接触力静力相等。(3)本文仍采用库伦摩擦定律,但是,静与动摩擦系数可用不同的值。

2 接触体的物理模型

按照本文模型,被动体实际被接触点不一定为网格节点,因此对该点的坐标及位移值进行插值是必要的。本文对二、三维问题均采用线性插值。

二维接触表面离散化:参见(2)~(4)式。图1示出了三维情况下接触表面离散化时被动体的一个四边形单元。主动体一节点 K 可能在被动体面上任意点 P 与之接触。该单元假定由四个具有共顶点 O (局部坐标 $r=0, s=0$)的三角形所组成。由图1可见,在 ABO 三角形内一点 P 的面积(自然)坐标为

$${}^{t+\Delta t}X_P = 1/4[(4\alpha + \gamma){}^{t+\Delta t}X_A + (4\beta + \gamma){}^{t+\Delta t}X_B + \gamma{}^{t+\Delta t}X_C + \gamma{}^{t+\Delta t}X_D] \quad (1)$$

式中: X 为总体坐标; α, β, γ 为面积坐标;左上标 $t+\Delta t$ 表示参数在该时刻之值,右下标 P, A, B, C, D 表点号。

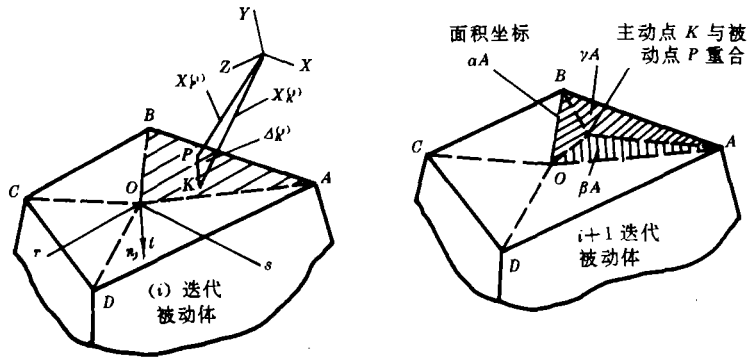


图 1 三维接触表面离散化及变形一致条件

两物体接触可能出现三种状态:粘式、滑移、开式。在一个接触面对中,不同部位可能有不同接触状态,因而有不同的变形一致条件。对于二维情况,图 2 示出了接触时边界变形情况,(i)次迭代结束时主动体节点 K 嵌入被动体,产生了材料重叠 $\Delta_K^{(i)}$ 由于违反了协调条件,

应进行修正。对于粘式接触,被动体表面实际接触点 $P^{(i)}$ 应与主动体 K 点共同运动到 $P^{(i+1)}$ 处(右上标(i)、($i+1$)表示计算时迭代次数)才能使位移协调,因此双箭头所指为($i+1$)次迭代经过接触边界协调处理后的边界形状。由图 2 几何关系可以得到

$$d_j^{(i)} = \bar{n}_r^T ({}^{i+\Delta t} X_B^{(i)} - {}^{i+\Delta t} X_A^{(i)}) \quad (2)$$

$$\beta^{(i)} = \bar{n}_r^T ({}^{i+\Delta t} X_P^{(i)} - {}^{i+\Delta t} X_A^{(i)}) = \bar{n}_r^T ({}^{i+\Delta t} X_K^{(i)} - \Delta_K^{(i)}) - {}^{i+\Delta t} X_A^{(i)} \quad (3)$$

$$\bar{n}_r = n_r / d_j^{(i)} = \bar{n}_{r,j} + \bar{n}_{r,k} \quad (4)$$

式中: n 为接触单元局部坐标的单位矢量,下标 r, s 为接触边界单元沿切向与法向的局部坐标,上标 T 为转置符号, Δ_K 为主动接触点 K 处的材料重叠矢量,由(3)式可见, β 为被动体接触边界上实际接触点 P 在边界上相对位置,其余符号见前面说明。由图 2 可见,在粘式情况下,在接触边界上变形一致条件

$${}^{i+\Delta t} \Delta_K^{(i)} = {}^{i+\Delta t} X_K^{(i)} - {}^{i+\Delta t} X_P^{(i)} \quad (5a)$$

对于滑移情况,沿被动接触元法线方向主动接触节点 K 与被动接触点 P 坐标应相同,而切线方向有相对运动,其约束为

$$\bar{n}_r^T \Delta_K = \bar{n}_r^T ({}^{i+\Delta t} X_K^{(i)} - {}^{i+\Delta t} X_P^{(i)}) \quad (5b)$$

即仅有沿法线自由度方向受变形一致条件约束。

可将(5a)与(5b)式合成写

$$C_j^T \Delta_K = C_j^T ({}^{t+\Delta t} X_K^{(i)} - {}^{t+\Delta t} X^{(i)r}) \quad (5)$$

式中: C_j 为一参数, 下标 j 表示第 j 个单元

$$C_j = \begin{cases} [I] & \text{当为粘式接触时} \\ n_j & \text{当为滑动接触时} \end{cases} \quad (5c)$$

对于开式情况, 不存在变形一致条件。

三维体接触变形一致条件与二维体没有区别, 可沿用(5)式。

3 考虑接触边界条件的修正势能原理及控制方程的导出

考虑接触边界条件时的虚功原理为系统的总虚功取极值

$$\delta \pi = \int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV - \int_V F_i \delta u_i dV - \int_S T_i \delta u_i dS = 0 \quad (6)$$

在 S_c 力边界上, 满足静力边界条件 $T_i = \bar{T}_i$ 。式中 $\bar{T}_i$ 为外力。在 S_c 几何边界上满足位移边界条件 $u_i = \bar{u}_i$ 。 $\bar{u}_i$ 为外加指定位移。对于接触问题还应满足: 在接触边界上满足(5)式的协调条件, 即

$$C_j^T (X_K^{(i)} - X_P^{(i)} - \Delta_K^{(i)}) = 0 \quad (7)$$

将(7)式的约束条件用拉格朗日法代入(6)式, 构成修正的势能 π_m , 然后取驻值

$$\delta \pi_m = \delta \pi - \delta \pi_c = 0 \quad (8)$$

式中

$$\pi_c = \sum \lambda^{(i)} C^T (X_K^{(i)} - X_P^{(i)} - \Delta_K^{(i)}) \quad (9)$$

(9)式中, λ 为拉氏乘子; $\sum$ 表示对所有主动接触节点求和。由(8)式可导出接触问题的控制方程。该式右端第一个变分式可建立常规(不带接触边界)的线性或非线性的静、动力的有限元控制方程^[3], 本文仅引用结果, 重点讨论第二个变分 $\delta \pi_c$ 。由于接触的非线性性质, 采用增量形式变分为好。替代(5)式增量形式的接触面变形协调条件为

$$C_j^T (\Delta q_K^{(i)} + \Delta_K^{(i)} - \Delta u_P^{(i)}) = 0 \quad (10)$$

式中 $\Delta q_K^{(i)}$ 为主动接触点 K 在 $i+1$ 次迭代时位移增量, $\Delta u_P^{(i)}$ 为同一迭代时被动点 P 的位移增量, 为简化书写, 忽略了左上标 $t+\Delta t$ 。

用上述思路可得出二维情况接触势能

$$\pi_c^{(i+1)} = \lambda_K^{(i+1)} C^T [(\Delta q_K^{(i)} + \Delta_K^{(i)}) - (1 - \beta^{(i)}) \Delta q_K^{(i)} - \beta \Delta q_P^{(i)}] \quad (11)$$

$$\lambda_K^{(i+1)} = \lambda_K^{(i)} + \Delta \lambda_K^{(i)} \quad (12)$$

式中 $\lambda_K^{(i)}$ 主动接触点 K 在第 i 次迭代时拉氏乘子为已知值, $\Delta \lambda_K^{(i)}$ 为由 i 至 $i+1$ 次迭代时增量, 为待求值。由(11)式可见 λ_K 的物理意义为 K 点接触力。

粘式接触情况: 在粘式接触情况下, 实际被接触点 P 在 i 次迭代相对位置 $\beta^{(i)}$ 与 $i+1$ 次迭代时 $\beta^{(i+1)}$ 是相同的。

摩擦滑动情况: $\beta^{(i+1)} = \beta^{(i)} + \Delta \beta^{(i)}$ 。由(3)式并考虑线性化

$$\Delta \beta^{(i)} = \{ \bar{n}_r \}^T [\{ \Delta q_K^{(i)} \} + \{ \Delta_K^{(i)} \} - \{ \Delta q_P^{(i)} \}] \quad (13)$$

约束位移条件的具体表达式为

$$\{ n_s \}^T \{ \Delta u_P^{(i)} \} = \{ n_s \}^T (\{ \Delta q_K^{(i)} \} + \{ \Delta_K^{(i)} \}) \quad (14)$$

在将(13)、(14)式代入(11)式时, 假定由 i 至 $i+1$ 迭代步长足够小, 因而忽略了 $\Delta \beta^{(i)}$, 这样简化结果可导出对称的方程, 自然, 步长不可过大。

开式接触情况: 由于接触力为零, 因而 π_c 为零, 从而略去。

图 1 示出了在三维时主动接触点 K 运动情况,与二维问题类似,其增量形式为(10)式,将(1)以位移参数代入

$$4C_j^T(\Delta q_k^{(i)} + \Delta q_k^{(i)}) - C_j^T(4\alpha^{(i)} + \gamma^{(i)})\Delta q_k^{(i)} + (4\beta^{(i)} + \gamma^{(i)})\Delta q_k^{(i)} + \gamma^{(i)}\Delta q_k^{(i)} + \gamma^{(i)}\Delta q_k^{(i)} = 0 \quad (15)$$

(15)式为三维接触的位移协调条件的增量形式。

粘式接触情况: $\alpha^{(i)}$ 、 $\beta^{(i)}$ 、 $\gamma^{(i)}$ 分别等于 $\alpha^{(i+1)}$ 、 $\beta^{(i+1)}$ 、 $\gamma^{(i+1)}$, (15)式中 $C_j = [I]$ 为单位矩阵。

摩擦滑移情况: $\alpha^{(i+1)} = \alpha^{(i)} + \Delta\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i+1)} = \beta^{(i)} + \Delta\beta^{(i)}$, $\gamma^{(i+1)} = \gamma^{(i)} + \Delta\gamma^{(i)}$ 。同二维,求 π_c 时,步长不大时忽略了各增量,简化方程达到对称。此时(15)式中, $C_j = \{n_j\}$, 即单元法向单位矢量。

开式接触情况:接触力为零, π_c 为零,从而略去。

将(11)、(12)(二维)或(15)、(12)(三维)代入(9)式。利用原来成果^[3],按有限元通常推导过程,得到带接触最后控制方程

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{q}^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{q}^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} K_F^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & K_C^{(i)} \\ K_C^{(i)T} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta q^{(i)} \\ \Delta \lambda^{(i)} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_C^{(i)} \\ \Delta \lambda^{(i)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

方程总维数应为各接触体位移自由度加主动体接触点独立接触力数,该点为粘式接触时,接触力数与位移自由度数一致;当为滑移接触时,一个主动体接触点仅有一个未知接触力。 M 、 C 、 $K_F^{(i)}$ 、 F 、 T 、 $P^{(i)}$ 分别为系统的质量、阻尼、切向刚度(当接触体为线性时,即为一般刚度阵)矩阵、体积力、表面力、等效节点力矢量。 K_C 、 R_C 、 $\Delta \lambda$ 、 Δ 是由于接触的附加项,具体表达式由于篇幅所限不再列出,其中 K_C 是接触节点自然坐标表达的矩阵, R_C 上次迭代主动节点接触力矢量, Δ 为材料重叠矢量, $\Delta \lambda$ 为接触力增量矢量。

式(16)是一个对称的非线性方程组,而且每次迭代未知数系数矩阵都随接触状态变化而改变。本文采用纯牛顿—拉斐逊法求解此方程组。对于动力问题,采用 Newmark 法,根据动量及能量守恒原理,取 $\alpha=1/2$, $\delta=1/2$ 时可得满意精度。

4 接触条件的判断与修正

由接触方程(16)可解得 $i+1$ 迭代步接触力与位移,此时必须判断各节点处于什么样接触状态,当一个节点 i 与 $i+1$ 步接触状态不同时,如何修正 $i+1$ 步的接触条件。其过程如下,由式(16)得接触节点力,按插值函数求得等价的接触单元分布力,进而求出接触单元的合力,从而判断两接触单元的接触状态,再由一个接触节点周围各单元接触情况判断该节点接触状态,最后根据节点接触状态,修改控制方程进行新的一步迭代。

由单元法向与切向合力可判断接触表面单元的接触状态。

表 1 主动体接触节点判据

其他相邻元 接触状态	一相邻元接触状态		
	粘 式	滑 移	开 式
粘 式	粘式	粘式	粘式
滑 移	粘式	滑移	滑移
开 式	粘式	滑移	开式

(1)开式:法向分量 T_j 为负,下标 j 表单元元号,上标 n 表法向。接触力应修正为零。

(2)粘式:法向合力 T_j (压力)为正,切向合力 T_j 绝对值小于静摩擦力,不需对接触力修正。

(3)摩擦滑移:法向合力为正,切向合力绝对值大于静摩擦力,需要对接触力进行修正,使

其切向分量等于摩擦力。

主动接触面上节点接触状态由其相邻接触单元决定,其法则列于表 1。按照判断后主动点状态修正(16)式中 $K^{(i+1)}$ 与 $\Delta R^{(i+1)}$,进行新的迭代。至此完成一次求解全过程。

接触迭代收敛准则为节点接触力不平衡准则 $\|\Delta R^{(i)} - \Delta R^{(i+1)}\| / \|\Delta R^{(i+1)}\| \leq e$ 。式中 e 为给定容差。

5 算 例

本文所述理论与方法已编入航空航天部 628 所开发的通用非线性程序 APOLANS 中,并已算过大型工程实际课题。此间仅给出两个小的算例。

[例 1] 一个球一部分与一个刚性面相接触,球缺上部施加初位移 0.5mm,其几何尺寸及网格见图 3,本例中物体设为线性,使用二维轴对称元。

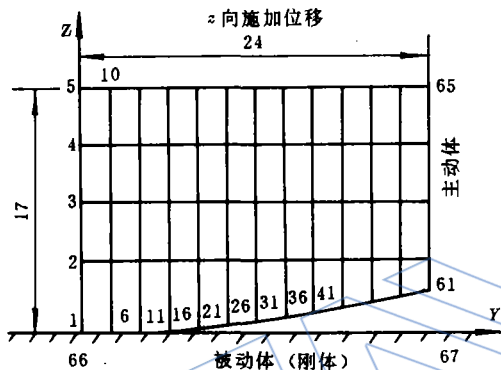


图 3 球缺与刚性平面接触图

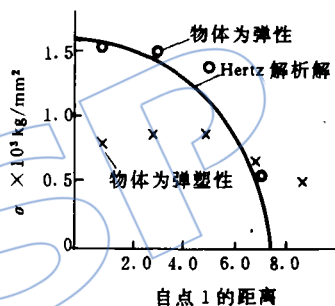


图 4 本法与 Hertz 法计算结果比较

[例 2] 载荷、结构、网格等均同于例 1,但接触体为弹塑性。

图 4 给出了本文与 Hertz 解析法计算结果的对比,在弹性情况下本法结果与 Hertz 法很一致;在弹塑性情况下,由于接触区应力集中,所有接触单元及临近单元进入塑性,接触应力下降,接触面积加大。

参 考 文 献

- 1 何君毅. 线性非线性结构分析程序—APOLANS 简明理论手册. 航空航天部 628 所, 1988
- 2 何君毅. 用子结构法分析大应变非弹性接触问题. 中国航空科技文献 HJB850284, 1985
- 3 何君毅. 几何非线性有限元基本方程之推导及现有理论的评述. 中国航空科技文献 HJL860028, 1986
- 4 Bathe K J, Chaudhary A. A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems. Int. J. Numer. Meth. Engng, 1985, 21, 65-88
- 5 Chaudhary A, Bathe K J. A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-Dimensional Contact Problems with Friction. Computer & Structures 1986, 24(6), 855-873
- 6 Bohm J. A Comparison of Different Contact Algorithms with Applications. Computer & Structures, 1987, 26(1/2), 207-221
- 7 Chen Wenhua, Yen Jyityan. Finite Element Analysis of Finite Deformation Contact problems with Friction. Computer & Structures, 1988, 29(3), 423-436

proven that the data can be used for the engineering analyses. The analytical method can be extended for the other bearings with similar lubrication film of oil-air two-phase fluid.

A FEM OF THERMOELASTO—PLASTIC ANALYSIS WITH DUE REGARD FOR LOADING PATH

Zhang Dongxu and Song Limin

(Dalian University of Technology)

ABSTRACT Until now a lot of investigations have been done on the thermoelasto-plastic analysis. Its general approach is to add up all the external forces on the structure to form a so-called load vector and to divide the element states into elastic, plastic and elastoplastic elements, but the variation of the element states during the loading procedure and the loading path are always ignored. In fact these two factors do affect the reliability of the analytic results. In order to improve the accuracy of the thermoelasto-plastic analysis, two algorithms are proposed which imitate the loading path and take the shifting of the element states into account. The external forces are expressed as the functions of time respectively. Thereby the analysis procedure corresponds to the loading procedure. The element states are classified into six kinds according to the different stress-strain states. Thus a program system is developed. Two examples are given to show the difference between the analysis results under different loading path.

A NEW MECHANICAL MODEL AND ALGORITHM FOR FINITE ELEMENT ANALYSIS OF CONTACT PROBLEMS

He Junyi

(China Aero-Information Center)

ABSTRACT A new mechanical model for FEM analysis of contact problems is presented, in which a nodal point on the surface of contact body comes into contact with an arbitrary point on the surface of target body instead of the nodal point pair model. It is convenient to construct FE nets. The boundary conditions such as stick, slid with friction and open contact were given in terms of this model. The contact boundary conditions as Lagrangian multipliers are substituted into the functional according to the principle of modified potential energy and therefrom the symmetrical nonlinear governing equations are deduced for the static and dynamic contact problems with material and/or geometric nonlinearities. Due to the symmetrization of equations, the general effective solution methods of nonlinear equations can also be used to the contact governing equations. In the paper the judgement criteria of contact conditions after each iteration are presented, which can decide whether and how the contact conditions of each contact nodal point to be modified.