

用有限元法解稳态蠕变问题的新途径

西安交通大学 穆霞英* * 王吉伟

【摘要】 本文给出直接求解稳态蠕变应力解的有限元方法, 针对不同材料特性, 提出了初应变率法与广义切线刚度法。并写出计算公式与步骤, 研制了分析程序。有算例说明本方法的优越性。

关键词: 稳态蠕变 蠕变 有限元法

1 前 言

结构另部件在高温负荷条件下, 即使载荷不变, 由于材料蠕变效应, 应变场随着时间变化, 应力场亦相应发生瞬时变化 (称之瞬态蠕变)。但是随着时间的增长应力变化逐渐变缓而趋近于极限值^[1]。应力解与时间无关 (称之为稳态蠕变)。热端部件长期在温度、转速日益增长的条件工作, 进行寿命预测至关重要。为了估算热端部件的寿命, 往往要求其稳态蠕变解。但现有的有限元计算方法, 通常是采用欧拉方法 (显式及隐式算法), 沿着工作时间, 按时间增量步逐步求解, 由瞬态直至稳态。这对复杂结构, 特别是高应力情况, 计算时间十分可观。本文另辟途径, 绕过瞬态而研究直接求稳态蠕变解的有限元方法。但是由于稳态蠕变本构方程的特征, 给有限元方法的处理带来了致命的困难, 长期来未曾解决。而本文采取比拟的办法, 建立基本模式解决了这个问题。提出了初应变率法与广义切线刚度法。在蠕变分析中, 时间增量步的适当选择十分重要, 时间步过大, 对显式算法会形成解的发散, 对隐式算法亦有可能无数次自动迭代。而本方法的特点可以免去选择时间增量步的麻烦。

2 本构方程

假设本构方程是离散型的, 即不考虑蠕变与塑性变形之间的耦合关系。

分析蠕变过程: 在加载开始阶段, 瞬时应变占主导地位, 但长时间后结构上各点材料陆续进入第二阶段, 逐渐变为第二阶段蠕变占控制地位。于是稳态蠕变本构方程中可以省略瞬时应变部分。若以时间硬化蠕变理论为例, 其瞬态蠕变与稳态蠕变的本构方程为:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon} \bar{\epsilon}_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = (3\bar{\epsilon}/2\bar{\sigma}) s_{ij}, \quad \bar{\epsilon} = B\sigma^m \quad (1)$$

其中 B 、 m 为材料常数; $\bar{\sigma}$ 、 $\bar{\epsilon}$ 、 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 、 s_{ij} 分别表示等效应力、等效应变率、应变率张量、应力偏量。

3 初应变率法与广义切线刚度法

3.1 基本模式

由方程 (1) 式可见, 求解稳态蠕变问题, 类似于求解塑性问题, 但是, 由于本构方程中略去了弹性应变部分, 传统求解弹塑性问题的有限元处理方法行之无效, 需探求新途径。对于非线性问题, 其物理方程是 $f(\{\sigma\}, \{\epsilon\}) = 0$, 可写成

$$\{\epsilon\} = [T]_y \{\sigma\} \quad \text{或} \quad \{\sigma\} = [D]_y \{\epsilon\} \quad (2)$$

以空间轴对称问题为例不失其一般性, $[D]_y$ 可写出

$$[D]_y = \frac{E_y}{1 + \nu} \begin{bmatrix} (1 - \nu)/(1 - 2\nu) & \text{对} & & \\ \nu/(1 - 2\nu) & (1 - \nu)/(1 - 2\nu) & & \\ \nu/(1 - 2\nu) & \nu/(1 - 2\nu) & (1 - \nu)/(1 - 2\nu) & \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{称}$$

式中 E_y 、 ν 、 $[D]_y$ 各表示弹性割线模量、泊桑比、弹性割线矩阵。对于非线性弹性问题, 它们是随 $\{\epsilon\}$ 而变。

对于稳态蠕变问题, 本构方程 (1) 可类似写成

$$\{\dot{\epsilon}\} = \lambda [T]_c \{\sigma\} \quad (3)$$

$$\text{令} \quad E_g = \bar{\sigma}/\bar{\epsilon} = 1/A \bar{\sigma}^{m-1}, \quad E_T = d\bar{\sigma}/d\bar{\epsilon} = 1/A m \bar{\sigma}^{m-1} \quad (4)$$

其中 E_g 、 E_T 各称为广义割线模量与广义切线刚度。这里, $\lambda = \bar{\epsilon}/\bar{\sigma}$, 若取 $\nu = 0.499$, 则 (3) 式可写成

$$\{\sigma\} = [D]_g \{\dot{\epsilon}\} \quad (5)$$

$$[D]_g = \frac{E_g}{1 + \nu} \begin{bmatrix} (1 - \nu)/(1 - 2\nu) & \text{对} & & \\ \nu/(1 - 2\nu) & (1 - \nu)/(1 - 2\nu) & & \\ \nu/(1 - 2\nu) & \nu/(1 - 2\nu) & (1 - \nu)/(1 - 2\nu) & \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{称} \quad (6)$$

$[D]_g$ 称之为广义割线矩阵。若把 $[D]_g$ 中的 E_g 换成 E_T , 记为 $[D]_T$, 称之为广义切线矩阵。

观察 (2) 与 (5) 式, 二式形成明显的比拟关系, 只要作相应的代换, 各以 $[D]_g$ 、 $\{\dot{\epsilon}\}$ 代换 $[D]_y$ 、 $\{\epsilon\}$ 。稳态蠕变问题即可利用非线性弹性问题的求解方法进行处理。

3. 2 有限元方法

以牛顿法及修正的牛顿法为基础, 结合稳态蠕变本构方程的特征, 提出如下两种方法。

3. 2. 1 初应变率法

假设蠕变体的材料特性方程 (即蠕变规律) 为

$$\{\dot{\epsilon}\} = f(\{\sigma\}) \quad (7)$$

设想把蠕变体类比具有初应变 (但这里应代换成初应变率) 的弹性问题, 得到物理方程为

$$\{\sigma\} = [D]_T^0 (\{\dot{\epsilon}\} - \{\dot{\epsilon}^0\}) \quad (8)$$

式中 $\{\dot{\epsilon}^0\}$ 即初应变率。调整 $\{\dot{\epsilon}^0\}$, 使它在给定的应力值 $\{\sigma\}$, 由 (7) 或 (8) 式可以得到相应的应变率 $\{\dot{\epsilon}\}$ 。式中 $[D]_T^0$ 为初始点的 $[D]_T$, 根据蠕变材料 $\sigma \sim \epsilon$ 曲线的初始切线模 E_T^0 确定。但是, 由方程 (4) 可见, $E_T^0 = \infty$, 无法进行分析, 这说明初始点必须另作适当选择。我们选择 $\sigma \sim \epsilon$ 曲线上的某一点 A (如图 1 (a) 所示) 作为初始点来克服此困难, 并采用 A 点的切线模量 E_T^A 来构成 $[D]_T^A$, 于是方程 (8) 及其平衡方程可改写为

$$\{\sigma\} = \{\sigma\}^A + [D]_T^A (\{\dot{\epsilon}\} - \{\dot{\epsilon}\}^A - \{\dot{\epsilon}^0\}) \quad (9)$$

$$[K] \{\dot{u}\} = \{P\} - \int B^T \{\sigma\}^A - [D]_T^A (\{\dot{\epsilon}\}^A + \{\dot{\epsilon}^0\}) dv \quad (10)$$

式中 $\{\sigma\}^A$ 及 $\{\dot{\epsilon}\}^A$ 是 A 点的应力及应变率。简便起见 $[D]_T^A$ 简写为 $[D]_T$ 。 $[K]$ 为广义切线

刚度矩阵, 在计算开始, 应力未知, 而 $\{\dot{\epsilon}\}$ 与实际应力有关, 故只能由 (10) 式迭代求位移率 $\{\dot{u}\}$ 的解, 在迭代过程中 $[K]$ 是不变的, 其迭代序列为

$$\lambda_n = \bar{\sigma}_n / \bar{\epsilon}_n, \quad \{\dot{\epsilon}\}_n = \lambda_n [T]_c \{\sigma\}_n - \{\dot{\epsilon}\}^o - [D]^{-1} (\{\sigma\}_n - \{\sigma\}^o) \quad (11)$$

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\}^o - [D]_T (\{\dot{\epsilon}\}^o + \{\dot{\epsilon}\}_n), \quad \{R^*\}_n = - \int B^T \{\sigma'\}_n dv \quad (12)$$

$$[K] \{\dot{u}\}_{n+1} = \{P\} + \{R^*\}_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

迭代过程简单示意如图 1 (a)。迭代开始, 设初应变率 $\{\dot{\epsilon}\}^o = 0$, 得到 $\{R^*\}_n$ 后, 由 (13) 式解出 $\{\dot{u}\}_n$ 。将 $\{\dot{u}\}_n$ 代入方程 (10) 可解得 $\{\dot{\epsilon}\}_n$ 及 $\{\sigma\}_n$ 。由 (11) 式计算 λ_n , 从 (7) 式计算 $\{\dot{\epsilon}\}_n$ 。后由 (11) 式可算得 $\{\dot{\epsilon}\}_n$, 迭代至收敛。

3. 2. 2 广义切线刚度法

由于某些材料, 应力幂数太高, 采用上述方法收敛较慢, 而采用广义切线刚度法。在迭代过程考虑到 E_T 、 $[D]_T$ 随 $\{\dot{\epsilon}\}$ 而变。假设真实的应力和应变率是 $\{\sigma\}$ 、 $\{\dot{\epsilon}\}_n$, 在其 n 次近似值附近作一阶泰勒级数展开, 可得

$$\{\sigma\} = \{\sigma\}_n + [D]_T^n (\{\dot{\epsilon}\} - \{\dot{\epsilon}\}_n) \quad (14)$$

将方程 (14) 与 (10) 式联立、建立迭代序列如下

$$\lambda_n = \bar{\sigma}_n / \bar{\epsilon}_n, \quad \{\dot{\epsilon}\}_n = \lambda_n [T]_c \{\sigma\}_n \quad (15)$$

$$\{R\}_n = - \int B^T (\{\sigma\}_n - [D]_T^n \{\dot{\epsilon}\}_n) dv, \quad [K]_n \{\dot{u}\}_{n+1} = \{P\} + \{R\}_n \quad (16)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

迭代过程简单示意如图 1 (b)。迭代开始, 满足 (15) 式选定初始值 $\{\sigma\}^o$ 、 $\{\dot{\epsilon}\}^o$, 可得 λ 、 E_T^o 、 $[D]_T^o$ 、 $[K]_o$ 。令 $\{R\}_o = 0$, 由 (16) 式解得 $\{\dot{u}\}_{n+1}$, 并求得 $\{\dot{\epsilon}\}_{n+1}$, 由 (14) 式求出 $\{\sigma\}_{n+1}$, 作为下一次迭代的 $\{\sigma\}_n$ 。重复迭代至收敛。

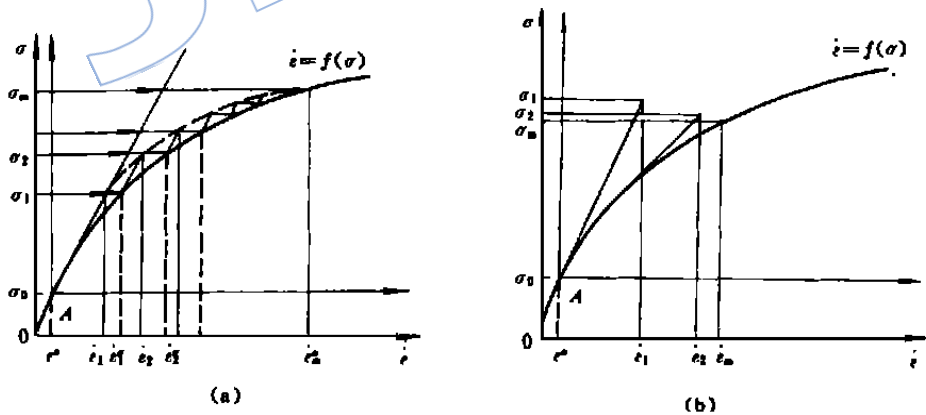


图 1 迭代过程示意图 (a) 初应变率法 (b) 广义切线刚度法

在上述两个方法的迭代过程中, 初值 $\{\sigma\}^o$ 的选取是一关键。在实际计算中, 根据经验, 认为 $\{\sigma\}^o$ 可选择为 $\{\sigma\}^o = C \{\sigma\}^{ep}$ 。这里, $\{\sigma\}^{ep}$ 是蠕变开始的弹塑性应力解。 C 是一个常数, 称之为应力系数, 它根据 m 值的大小作适当选择。一般 $m < 5$ 时取 $C = 1.0 \sim 1.1$; $m > 5$ 时取 $C = 0.15m \sim 0.2m$ 为宜。

4 算 例

例 1 管道内外半径各为 0.4 与 0.64cm, 蠕变规律为 $\dot{\epsilon}=0.5986 \times 10^{-11} \cdot \sigma^{4.4}$ 。以两种工况承受内压: 工况 1 为弹性蠕变问题, $P=2.555 \text{MPa}$; 工况 2 为弹塑性蠕变问题, $P=57.4838 \text{MPa}$ 。采用初应变率法计算, 并分别用本文方法及原有方法计算。结果与理论解比较的误差示于表 1 (带* 者表示原方法)。

表 1 计算结果与理论解比较

工 况	C	迭代步骤	$\bar{\sigma}$ 误差	σ_{θ} 误差
工 况 1	1.1	24	0.035%	0.04%
		42*		
		7		
工 况 2	1.1	28*	0.60%	1.0%
		9		
		294*		

例 2 等厚度旋转盘的材料性质与几何尺寸如文献 [2]、其蠕变规律为 $\dot{\epsilon}=0.504 \times 10^{-36} \cdot \sigma^{7.2}$ 。该盘处于弹性状态, 取 $\{\sigma\}_e=\{\sigma\}^e$, 采用广义切线刚度法, 迭代 10 次到达稳态蠕变。计算结果与文献 [2] 的理论解比较如图 2 (周向应力 σ_{θ} 、径向应力 σ_r 与坐标 r 曲线)。

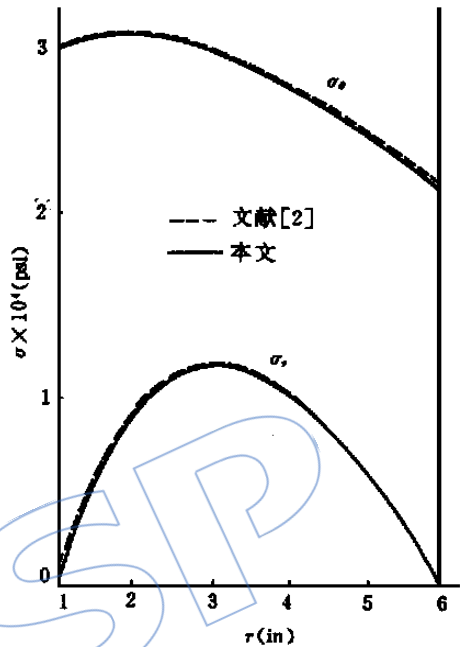


图 2 应力坐标曲线

参 考 文 献

1 穆霞英. 蠕变力学. 西安交通大学出版社, 1990
2 Wahl A M, Sankey G O, Maryoine M J, Shoemaker E. Creep Tests of Rotating Disks at Elevated Temperature and Comparison with Theory. Journal of Applied Mechanics. 1954, (21): 225- 235

(责任编辑 朱梓根)

established, which can be applied to the turbine blade of the advanced aeroengine.

A NEW WAY TO SOLVE STEADY CREEP PROBLEM WITH FINITE ELEMENT METHOD

Mu Xiaying and Wang Jiwei

(Xi'an Jiaotong University)

ABSTRACT In this paper, a new way to solve steady creep with finite element method is presented for temperature-dependent material properties of symmetric body. According to different material properties, initial strain rate method and general tangential stiffness method are provided. A computing program is compiled. Some examples are analysed numerically to check its convergency and applicability.

ON ENGINE PARAMETER ESTIMATION WITH FLIGHT TEST DATA

Fan Siqi and Rong Xiangjun

(Northwestern Polytechnical University)

Li Shuren and Xin Xiaowen

(Flight Test Research Institute)

ABSTRACT This paper introduces the parameter estimation research for the turbine inlet temperature and compressor exit pressure by using the engine variables measured under the different flight conditions. The parameter estimation method is multiple linear regression analysis. The independent variables in the regression equations have been selected from six measured engine variables based on the comprehensive optimal principle about variable selection. The regression models which have been established only include three measured engine variables. The curves of the parameter estimation results shown in this paper demonstrate that the estimation accuracies of these models are satisfactory. This paper also presents the data treatment methods of engine variables recorded on-line with special equipment.

AN AERODYNAMIC DESIGN PROGRAM FOR CONTRA-ROTATING TURBINE CASCADES

Cai Ruixian and He Yongmei

(Institute of Engineering Thermophysics)

Wei Xinglu

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT An extremely simple, rapid and universal turbine cascade design program is developed for contra-rotating turbine cascades. With its simplest operating condition, only four data are necessary to be input for obtaining the geometry of a good enough cascade. They are just the input data for designing a cascade— the inlet Mach number and flow angle, the outlet Mach number and the specific heat ratio of working substance. Therefore, it means that the design can be accomplished without any additional human