

二维双侧容限系数公式

北京航空航天大学 傅惠民*
唐山工程技术学院 佟晓君

【摘要】 给出一种二维双侧容限系数公式, 并提出相应的估计双侧容忍区间的方法。该方法可以充分利用以往积累的经验数据, 减少当前试验中的试件个数, 提高预测精度。

主题词: 正态分布 区间估计 可靠性估计

分类号: TB114 3 V219

1 二维双侧容限系数公式

设 X 为正态随机变量, 即 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 工程上常常需要了解 X (如产品的某一性能指标, 某一微量元素的含量等) 主要分布在多大的一个范围内, 即对于预先指定的概率 P , 要求一区间 $[a, b]$, 使 $P\{a \leq X \leq b\} = P$ 。如果母体均值 μ 和方差 σ^2 已知, 那么要求得一个包含该正态母体的 $100P\%$ 个体的区间 $[a, b]$ 是很容易的。但是, 实际问题中 μ 和 σ^2 都是未知的, 这时则必须用双侧容忍区间 $[X_{PL}, X_{PU}]$ 来估计 $[a, b]$ ^[1]。下面将给出一种能综合利用当前数据和经验数据估计双侧容忍区间的方法。

设 $\bar{X}$ 和 S^2 分别为母体均值 μ 和方差 σ^2 的无偏估计量, 并且

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(v) \quad (2)$$

若令

$$X_{PL} = \bar{X} - kS \quad (3)$$

$$X_{PU} = \bar{X} + kS \quad (4)$$

式中 k 被称为二维双侧容限系数, 当 $n > 3, v \geq 2$ 时, 可由下式计算

$$k = \frac{k_1}{k_2} + \frac{U - \frac{n+1}{n^2} U_{(1+P)/2}}{U + \frac{n+1}{n^2} U_{(1+P)/2}} (k_0 - k_1) \quad (5)$$

其中

$$k_0 = U_{(1+P)/2} \sqrt{1 + \frac{1}{U_{(1+P)/2}^2} \left(\frac{n}{U_{(1+P)/2}^2} + U_{(1+P)/2} - \frac{2}{5} U_P - 1 \right)} \quad (6)$$

$$k_1 = U_{(1+P)/2} \sqrt{1 + \frac{1}{U_{(1+P)/2}^2} \left(n + U_{(1+P)/2} - \frac{2}{5} U_P - 1 \right)} \quad (7)$$

$$k_2 = \left[1 - \frac{2}{9w} - u\gamma \sqrt{\frac{2}{9w}} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (8)$$

$$w = u + \frac{1}{2}u\gamma - 2\gamma + \frac{3}{5} + 1/\sqrt{u + \frac{1}{2}u\gamma - 2\gamma + \frac{3}{5}} \quad (9)$$

式中 n 被定义为子样均值 $\bar{x}$ 的自由度, u 为子样方差 s^2 的自由度, 由于 $\bar{x}$ 和 s^2 可以来自不同的子样, 所以 u 不一定等于 $n-1$, u 和 n 之间没有任何关系, 这也就是“二维”的含义, γ 为置信度, P 为容量, u_X 、 $u_{(1+\gamma)/2}$ 和 u_P 、 $u_{(1+P)/2}$ 均为标准正态偏量, 即 $\gamma = \Phi(u_X)$ 、 $(1+\gamma)/2 = \Phi(u_{(1+\gamma)/2})$ 和 $P = \Phi(u_P)$ 、 $(1+P)/2 = \Phi(u_{(1+P)/2})$, 其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数。那么可以证明, 区间 $[X_{PL}, X_{PU}]$ 是正态母体 X 的置信度为 γ 容量为 P 的双侧容忍区间, 即

$$P\{F(X_{PU}) - F(X_{PL}) \geq P\} = \gamma \quad (10)$$

式中 $F(X)$ 为正态随机变量 X 的分布函数。

设 $\bar{x}$ 和 s^2 分别是子样均值 $\bar{x}$ 和方差 s^2 的一个取值, 则由式(3)和式(4)得到 X_{PL} 和 X_{PU} 的一个取值

$$X_{PL} = \bar{x} - ks \quad (11)$$

$$X_{PU} = \bar{x} + ks \quad (12)$$

因此, 区间 $[X_{PL}, X_{PU}]$ 是容忍区间 $[X_{PL}, X_{PU}]$ 的一个实现。当 $u = n-1$ 时, 式(5)将退化成一维双侧容忍系数公式^[2]。

2 当前数据和经验数据的组合均值与标准差

由式(5)可知, 当自由度 n 或 u 增加时, 二维双侧容忍系数 k 值将减小。因此, 由式(11)和式(12)求得的双侧容忍区间的长度也将缩短, 即具有更高的精度。又因为 $\bar{x}$ 和 s^2 可以来自不同的子样, 所以可综合利用当前数据和经验数据, 分别提高子样均值 $\bar{x}$ 和方差 s^2 的自由度, 从而在精度相同的条件下, 能够节省大量试件; 在试件个数相同时, 又可提高预测精度。

2.1 当前数据和经验数据的组合均值

设 $\bar{x}_i$ 是来自正态母体 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ 的子样均值, 其子样大小为 n_i , $i = 1, 2, \dots, m$, 且它们相互独立, 若组合均值

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m n_i d_i \bar{x}_i / \sum_{i=1}^m n_i \quad (13)$$

的自由度取 $n = \left(\sum_{i=1}^m n_i \right)^2 / \sum_{i=1}^m n_i d_i^2 e_i$, 其中 $e_i \geq \sigma_i^2 / \sigma^2$, $i = 1, 2, \dots, m$ 。那么可以证明, 如果取 $d_i \mu_i = \mu$, $i = 1, 2, \dots, m$, 或 $E(\bar{x}) = \mu$, 则将组合均值 $\bar{x}$ 代入式(11)和式(12), 即可求得置信度至少为 γ 的双侧容忍区间。

在实际问题中, 可采用假设检验或根据经验和有关物理性质确定 d_i 和 e_i ^[2,3]。特别当 $\mu_i = \mu$ 时, 可取 $d_i = 1$; 当 $\sigma_i = \sigma$ 时, 可取 $e_i = 1$; 当只能断定 $\sigma_i \leq \sigma$, 而无法明确知道 σ_i 比 σ 小多少时, 也可取 $e_i = 1$ 。

对于经验数据提供的子样均值 $\bar{x}_i$, 经式(13)组合后, 必须使组合均值 $\bar{x}$ 的自由度 n 增大, 才有被利用的价值。否则, 不宜采用。

2.2 当前数据和经验数据的组合标准差

设子样方差 s_i^2 的自由度为 u_i , $E(s_i^2) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \dots, m$, 且它们相互独立, 那么组合标准差

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^m U_i b_i s_i^2 / \sum_{i=1}^m U_i} \quad (14)$$

的自由度 $U = \sum_{i=1}^m U_i$, 可以证明, 当取 $b_i \geq \sigma^2 / \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \dots, m$ 时, 将组合标准差 s 代入式(11)和式(12), 即可求得置信度至少为 γ 的双侧容忍区间。

同样, 可根据假设检验或有关物理性质及经验确定 b_i 。特别当 $\sigma_i = \sigma$ 时, 可取 $b_i = 1$; 当只知 $\sigma_i \geq \sigma$, 而无法确定 σ_i 比 σ 大多少时, 也可取 $b_i = 1$ 。

对于以往数据提供的子样方差 s_i^2 , 若要有可利用的价值, 除了满足 $b_i \geq \sigma^2 / \sigma_i^2$ 以外, 还要求 s_i^2 经式(14)组合后, 把组合标准差 s 代入式(11)和式(12)求得的双侧容忍区间的长度变短。否则, s_i^2 将提供不了有价值的信息, 亦即不宜采用。

3 实例分析

例 1 为了估计某材料缺口试件 ($K_t = 2$) 疲劳寿命的置信度 $\gamma = 90\%$ 、容量 $P = 99.9\%$ 的容忍区间, 现做了 4 根缺口试件的疲劳试验, 得到对数寿命均值 $\bar{x}_1 = 5.0116$, 标准差 $s_1 = 0.1258$ 。根据式(5)可求出 $n = 4$, $U = 3$, $\gamma = 90\%$, $P = 99.9\%$ 的双侧容限系数 $k = 8.0793$, 再由式(11)和式(12)即得

$$x_{PL} = \bar{x}_1 - k_1 s_1 = 3.9952, \quad x_{PU} = \bar{x}_1 + k_1 s_1 = 6.0280$$

由此可知, 其对数寿命的置信度为 90% 、容量为 99.9% 的容忍区间为 $[3.9952, 6.0280]$, 亦即可以 90% 的把握断言, 有 99.9% 的试件的疲劳寿命将分布在区间 $[9890, 1066596]$ 内。

后来又收集到在同一载荷下该材料的 18 根光滑试件的疲劳试验结果, 其对数寿命标准差 $s_2 = 0.1311$, 自由度 $U_2 = 17$ 。根据经验可知, 在其他条件相同的情况下, 缺口试件的寿命分散性不会大于光滑试件的寿命分散性, 即 $\sigma_2 \geq \sigma_1 = \sigma$, 因此可取 $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, 并通过式(14)求得当前数据(缺口试件)和经验数据(光滑试件)的组合标准差 $s = 0.1303$, 其自由度 $U = U_1 + U_2 = 20$ 。然后由式(5)求得 $n = 4$, $U = 20$, $\gamma = 90\%$, $P = 99.9\%$ 的二维双侧容限系数 $k = 4.7110$, 将 $\bar{x}_1$, s 和 k 代入式(11)和式(12)得到

$$x_{PL} = \bar{x}_1 - k s = 4.3978, \quad x_{PU} = \bar{x}_1 + k s = 5.6254$$

因此, 该缺口试件对数寿命的置信度至少为 90% 。容量为 99.9% 的容忍区间为 $[4.3978, 5.6254]$, 即至少可以 90% 的把握说, 有 99.9% 的缺口试件的疲劳寿命将位于区间 $[24992, 422085]$ 内。

对比上面的两种计算结果可以看到, 利用经验数据后, 该缺口试件的置信度为 90% , 容量为 99.9% 的对数寿命容忍区间的长度由原来未利用经验数据时的 2.0328 缩短为 1.2276, 约缩短了 40% ; 而寿命的容忍区间长度则由 1056706 (循环) 缩短为 397093 (循环), 约缩短了 62% , 大大提高了预测精度。

例 2 表 1 给出了某产品中锰含量的检测结果和该厂以往生产的同类产品中锰含量的子样标准差, 现要求产品的锰含量的置信度为 95% 、容量为 99.99% 的容忍区间。

表 1 某产品中锰含量的检测结果(%)

	序号	子样均值 $\bar{x}_i$	自由度 n_i	子样标准差 s_i	自由度 u_i
当前数据	1	0.32	5	0.0212	4
	2	-	-	0.0241	19
	3	-	-	0.0199	19
以往数据	4	-	-	0.0226	19
	5	-	-	0.0237	19
	6	-	-	0.0209	19
	7	-	-	0.0186	19

首先仅根据当前数据计算容忍区间。由式(5)求出 $n=5$ 、 $u=4$ 、 $\gamma=95\%$ 、 $P=99.99\%$ 的双侧容忍系数 $k_1=9.9793$, 再通过式(11)和式(12)得到

$$x_{PL} = \bar{x}_1 - k_1 s_1 = 0.1084\% \quad , \quad x_{PU} = \bar{x}_1 + k_1 s_1 = 0.5316\%$$

因此, 该产品中锰含量的置信度为 95%, 容量为 99.99% 的容忍区间为 $[0.1084\%, 0.5316\%]$ 。

其次, 考虑到近年来该厂设备更新、技术培训和质量管理的实施等, 各种波动因素得到了进一步控制。所以, 可认为该产品中锰含量的分散性不会大于以往生产的同类产品中锰含量的分散性, 即 $E(s_1^2) \leq E(s_i^2)$, 可取 $b_i=1$, $i=1, 2, \dots, 7$, 假设检验结果也支持这一结论。因此, 可综合利用表 1 中当前数据和以往数据估计容忍区间。根据式(14)求得组合标准差 $s=0.0217$, 其自由度 $u=118$, 然后通过式(5)求出 $n=5$ 、 $u=118$ 、 $\gamma=95\%$ 、 $P=99.99\%$ 的二维双侧容忍系数 $k=4.8861$, 再由式(11)和式(12)得到

$$x_{PL} = \bar{x}_1 - ks = 0.2140\% \quad , \quad x_{PU} = \bar{x}_1 + ks = 0.4260\%$$

由此可知, 该产品中锰含量的置信度为 95%, 容量为 99.99% 的容忍区间为 $[0.2140\%, 0.4260\%]$, 即可以 95% 的把握断定, 有 99.99% 的产品的锰含量位于区间 $[0.2140\%, 0.4260\%]$ 内。

从上述结果可以看到, 综合利用当前数据和以往数据得到的容忍区间的长度比仅根据当前数据估计的容忍区间的长度缩短了一半, 即预测精度提高了一倍。

本文方法不仅适用于完全数据, 而且也适用于不完全数据和无失效数据^[2, 4]。

参 考 文 献

- 1 Odeh R E, Owen D B. Tables for Normal Tolerance Limits, Sampling Plans, and Screening Marcel Dekker, Inc., New York, 1980
- 2 傅惠民 正态分布百分位值和百分率的置信限和容忍限公式 航空学报, 1994; 15(1): 94- 101
- 3 傅惠民 二维单侧容忍系数方法 航空学报, 1993; 14(3): A 116- A 170
- 4 傅惠民 不完全数据秩分布理论 航空学报, 1993; 14(11): A 578- A 584

(责任编辑 魏星禄)