

采用壳体应变应力状态的正交异性体—壳过渡元

株洲航空动力机械研究所 成晓鸣* 尹泽勇 杨治国

【摘要】 采用壳体应变—应力状态的过渡元推广于正交各向异性材料,以解决壳体法线与一个材料主轴重合的正交异性体—壳组合结构的应力分析问题。算例表明:采用本文建立的过渡元计算正交异性体—壳组合结构是有效的,精度能满足工程要求,并能节省计算时间。

主题词: 壳型 应变 应力 正交各向异性

分类号: V214.36 Q344.1

本文将文献[1]过渡元推广到正交异性材料,以解决壳体法线与一个材料主轴重合的正交异性体—壳组合结构的应力分析问题。算例表明:采用本文建立的过渡元计算这类正交异性体—壳组合结构是有效的,精度能满足工程要求,并能节省计算时间。

1 正交异性体—壳过渡元的应变—应力关系

建立的正交异性体—壳过渡元如图 1 所示,其中 1—3 节点为壳节点,4—15 节点为体节点。由于采用壳体应变—应力状态,在单元任一点处取局部坐标系 $x'y'z'$; 其中 z' 为法线方向。设 123 坐标系为该点的材料主轴坐标系,并设 3 轴与法线 z' 方向重合。

在局部坐标系 $x'y'z'$ 中,6 个应变应力分量之间的关系为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \sigma_z' \\ \tau_{xy}' \\ \tau_{yz}' \\ \tau_{zx}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}' & & & & & \\ c_{21}' & c_{22}' & & & & \\ c_{31}' & c_{32}' & c_{33}' & & & \\ c_{41}' & c_{42}' & c_{43}' & c_{44}' & & \\ c_{51}' & c_{52}' & c_{53}' & c_{54}' & c_{55}' & \\ c_{61}' & c_{62}' & c_{63}' & c_{64}' & c_{65}' & c_{66}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x' \\ \epsilon_y' \\ \epsilon_z' \\ \gamma_{xy}' \\ \gamma_{yz}' \\ \gamma_{zx}' \end{bmatrix} = [c'] \begin{bmatrix} \epsilon_x' \\ \epsilon_y' \\ \epsilon_z' \\ \gamma_{xy}' \\ \gamma_{yz}' \\ \gamma_{zx}' \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中的 c_{ij}' 等系数可利用下式得到:

$$[c'] = [A][c]_{123}[Q]^{-1} \quad (2)$$

其中 $[A]$ 、 $[Q]$ 分别为从 123 坐标系至 $x'y'z'$ 坐标系的应力、应变变换矩阵。由于过渡元采用壳

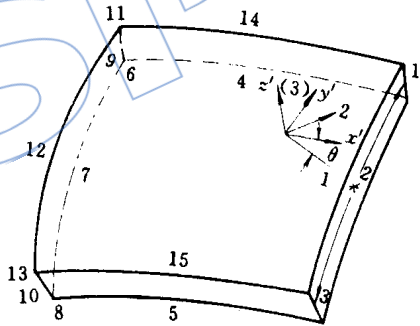


图 1 正交异性体—壳过渡元

体假设 $\sigma_e = 0$, 所以有

$$[c'_{31} \quad c'_{32} \quad c'_{43} \quad c'_{53} \quad c'_{63}] [\epsilon'_x \quad \epsilon'_y \quad \gamma'_{xy} \quad \gamma'_{yz} \quad \gamma'_{zx}]^T + c'_{33} \epsilon'_z = 0 \quad (3)$$

由上式得

$$\epsilon'_z = - (1/c'_{33}) [c'_{31} \quad c'_{32} \quad c'_{43} \quad c'_{53} \quad c'_{63}] [\epsilon'] \quad (4)$$

其中

$$[\epsilon'] = [\epsilon'_x \quad \epsilon'_y \quad \gamma'_{xy} \quad \gamma'_{yz} \quad \gamma'_{zx}]^T \quad (5)$$

由式(1)及(4)可以写出除 σ_e 外的 5 个应力分量与 $[\epsilon]$ 之间的关系式, 并将它们表示为如下矩阵形式:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \\ \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & & & & \\ d_{21} & d_{22} & \text{对 称} & & \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & & \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} \end{bmatrix} [\epsilon] \quad (6)$$

在过渡元法线与一个材料主轴重合的情况下, 有

$$c'_{51} = c'_{52} = c'_{53} = c'_{54} = c'_{61} = c'_{62} = c'_{63} = c'_{64} = 0$$

所以

$$d_{41} = d_{42} = d_{43} = d_{51} = d_{52} = d_{53} = 0$$

由于采用了直法线假设, 上、下表面具有剪应变, 剪应力 τ'_{yz} 、 τ'_{zx} 在上、下表面不为零, 而在上、下表面没有剪应力作用时剪应力 τ'_{yz} 、 τ'_{zx} 则应力零。为解决这一矛盾, 取厚度方向的平均剪应力 $\bar{\tau}'_{yz}$ 、 $\bar{\tau}'_{zx}$ 与平均剪应变 $\bar{\gamma}'_{yz}$ 、 $\bar{\gamma}'_{zx}$ 代替式(6)中的 τ'_{yz} 、 τ'_{zx} 与 γ'_{yz} 、 γ'_{zx} 而对应的剪切刚度系数为 $\bar{d}_{44}$ 、 $\bar{d}_{54}$ 、 $\bar{d}_{55}$ 。设剪应变 γ'_{yz} 、 γ'_{zx} 沿壳厚(厚度为 h)呈如下抛物线分布^[2]

$$\gamma'_{yz} = f(z) \bar{\gamma}'_{yz}, \quad \gamma'_{zx} = f(z) \bar{\gamma}'_{zx}, \quad f(z) = (5/4)[1 - (4/h^2)z^2] \quad (7)$$

则剪应力为

$$\begin{bmatrix} \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} \end{bmatrix} = \frac{5}{4} \left[1 - \frac{4}{h^2} z^2 \right] \begin{bmatrix} d_{44} & d_{54} \\ d_{54} & d_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma'_{yz} \\ \gamma'_{zx} \end{bmatrix} \quad (8)$$

将此剪应力沿壳厚方向积分, 并注意到积分结果应等于相应平均剪应力与厚度之积, 于是可以写出

$$\begin{bmatrix} \bar{\tau}'_{yz} \\ \bar{\tau}'_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} d_{44} & \frac{5}{6} d_{54} \\ \frac{5}{6} d_{54} & \frac{5}{6} d_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}'_{yz} \\ \bar{\gamma}'_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{d}_{44} & \bar{d}_{54} \\ \bar{d}_{54} & \bar{d}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}'_{yz} \\ \bar{\gamma}'_{zx} \end{bmatrix} \quad (9)$$

综上所述, 正交异性体—壳过渡元的弹性矩阵可写为

$$[d] = \begin{bmatrix} d_{11} & & & & \\ d_{21} & d_{22} & \text{对 称} & & \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} d_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} d_{54} & \frac{5}{6} d_{55} \end{bmatrix} \quad (10)$$

2 正交异性体—壳过渡元的初始热应变、应变向量、应力向量 单元刚度矩阵、载荷向量

在材料主轴坐标系 123 中, 初始热应变 $[\epsilon_0]_{123}$ 为

$$[\epsilon_0]_{123} = [\epsilon_{10} \quad \epsilon_{20} \quad \epsilon_{30} \quad \gamma_{120} \quad \gamma_{230} \quad \gamma_{310}]^T = T[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (11)$$

式中 T 为温度升, α_1 、 α_2 、 α_3 分别为 1、2、3 方向的线热膨胀系数。将 $[\epsilon_0]_{123}$ 转换为过渡元局部坐标系 $x \ y \ z$ 的初始热应变, 有

$$[\epsilon_0] = [\epsilon_{x0} \quad \epsilon_{y0} \quad \epsilon_{z0} \quad \gamma_{xy0} \quad \gamma_{yz0} \quad \gamma_{zx0}]^T = [Q][\epsilon_0]_{123} \quad (12)$$

由于本过渡元采用壳体应变—应力状态, 不考虑法线方向(z 方向)的应变, 所以在式(12)中略去 ϵ_{z0} 及对应的右端项, 即得到本过渡元的初始热应变 $[\epsilon_0']$ 。

本正交异性体—壳体过渡元的应变向量表达式与文献[1]中的应变向量相同。

考虑初始热应变情况下, 正交异性体—壳过渡元的应力向量为

$$[\sigma] = [d]([\epsilon] - [\epsilon_0']) \quad (13)$$

用弹性矩阵 $[d]$ 及初始热应变 $[\epsilon_0']$ 取代文献[1]中的弹性矩阵 $[D]$ 及初始热应变 $[\epsilon_0]$, 即可仿照文献[1]中的公式系统, 得到本正交异性体—壳过渡元的单元刚度矩阵 $[K]$ 及载荷向量 $[f]$ 。它们分别是

$$[K] = \int [B]^T [d] [B] dv \quad (14)$$

$$[f] = \int [N]^T [p] dv + \int [N]^T [t] ds + \int [B][d][\epsilon_0'] dv + [f_c] \quad (15)$$

式中 $[B]$ 为应变位移矩阵, $[f_c]$ 为节点集中力向量, $[p]$ 为元内体积分布力向量, $[t]$ 为面力向量, 其它符号含意同文献[1]。

3 算 例

3.1 受拉弯载荷的正交异性体—壳组合结构

图 2 为左端固定、右端受拉弯载荷的正交异性体—壳组合结构, 构成式(3)中矩阵 $[c]_{123}$ 各系数的 9 个独立工程常数为:

$$E_1 = 210 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 105 \text{ GPa}$$

$$E_3 = 50 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{23} = G_{31} = 80 \text{ GPa}$$

$$\nu_{21} = 0.1$$

$$\nu_{31} = 0.2, \quad \nu_{32} = 0.3$$

分析时该结构被划分为 10 个体元、1 个壳元和 1 个体—壳过渡元; 此外还将该结构划分为 12 个全体元进行了计算。按两种网格划分算出的 x 方向应变、应力示于表 1。从表 1 可见, 两种网格划分计算的应变、应力非常吻合。

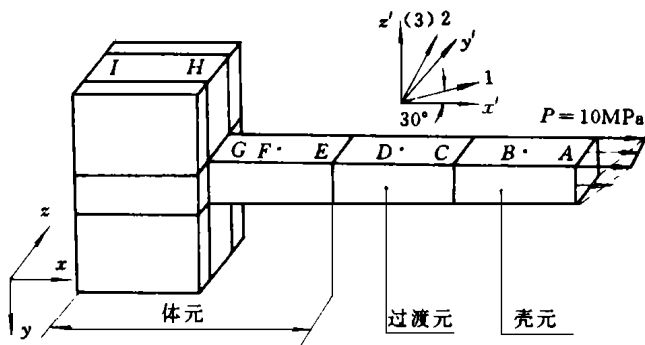


图 2 受拉弯载荷的正交异性体—壳组合结果

图 2 为左端固定、右端受拉弯载荷的正交异性体—壳组合结构, 构成式(3)中矩阵 $[c]_{123}$ 各系数的 9 个独立工程常数为:

表 1 应变、应力计算结果

位 置		A	B	C	D	E	F	G	H	I
应变 ($\times 10^{-6}$)	用过渡元解	52.60	52.60	52.60	52.65	52.61	52.12	22.90	- 3.71	5.45
	全体元解	52.63	52.52	52.58	52.86	53.67	51.97	22.81	- 3.72	5.47
应变 (MPa)	用过渡元解	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.75	5.03	- 0.78	1.29
	全体元解	9.98	10.00	10.06	9.98	9.95	10.75	4.99	- 0.78	1.29

3.2 承受离心力及热载荷的某定向凝固叶片

图 3 为某型发动机燃气涡轮叶片叶身计身模型, 叶片采用定向凝固材料, 其材料主轴坐标系见图 3, 材料常数为

$E_1 = E_3 = 118.44 \text{ GPa}$

$E_2 = 88.67 \text{ GPa}$

$\nu_{31} = 0.509$

$\nu_{21} = \nu_{32} = 0.36$

$G_{31} = 38.87 \text{ GPa}$

$G_{12} = G_{23} = 27.625 \text{ GPa}$

叶片受离心及热载荷, 转速为 45000 r/min, 温度分布见图 3。

分析时, 将叶片分为 35 个壳元、7 个体元和 7 个体壳过渡元, 共 49 个单元; 同时为了对比, 还将此叶片按同样的网格划分为 49 个全壳元及 49 个全体元。

关于叶尖位移, 三种计算模型的计算结果对比列于表 2。

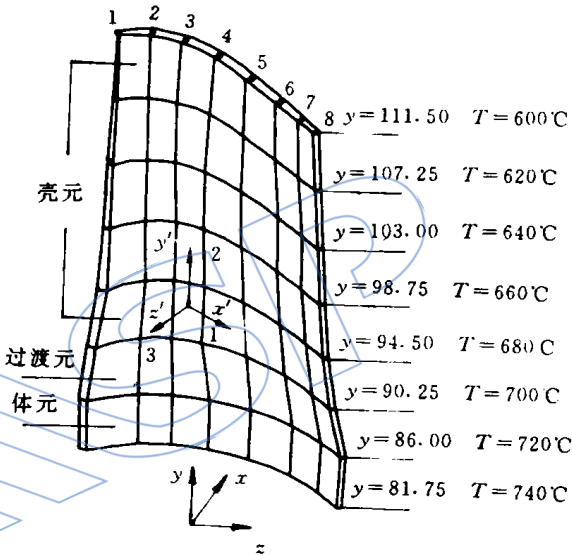


图 3 某定向凝固叶片叶身计算模型

表 2 叶尖位移对比

序 号	用过渡元解			全壳元解			全体元解		
	u_x	u_y	u_z	u_x	u_y	u_z	u_x	u_y	u_z
1	- 0.1226	0.3648	- 0.10971	- 0.1212	0.35219	- 0.11265	- 0.09603	0.3642	- 0.0938
2	- 0.03074	0.3595	- 0.10466	- 0.0289	0.34714	- 0.10767	- 0.00662	0.36014	- 0.0866
3	0.052975	0.35584	- 0.04438	0.05509	0.34387	- 0.04724	0.06795	0.35535	- 0.0299
4	0.11846	0.3587	0.061446	0.12091	0.34647	0.0589	0.12895	0.3585	0.0722
5	0.16834	0.3738	0.20223	0.17115	0.36157	0.20033	0.17994	0.37544	0.21648
6	0.20406	0.39404	0.33307	0.20723	0.38176	0.38170	0.2220	0.3979	0.35856
7	0.22946	0.40984	0.43122	0.23279	0.39751	0.43029	0.2517	0.41577	0.46496
8	0.24643	0.41943	0.49496	0.24965	0.40705	0.49371	0.27289	0.42713	0.53844

由表 2 可见: 采用过渡元算出的叶尖位移介于全体元和全壳元计算结果之间, 其中径向位移 u_y 与全体元解的误差为 1.44%, 与全壳元解的误差为 3.46%。

表 3、表 4 分别给出了采用过渡元模型算出的径向应力 σ_r 和 Mises 等效应力 α 以及全体元和全壳元模型的相应计算结果。

表 3 叶根部应力 MPa

序 号	坐 标 (mm)			用过渡元解		全体元解	
	x	y	z	σ_y	σ_e	σ_y	σ_e
1	0.3614	85.52	- 7.32	- 190.19	120.19	- 215.98	125.30
2	0.3614	83.88	- 7.32	793.29	600.97	829.98	603.86
3	0.3614	82.23	- 7.32	- 985.03	2026.34	- 1029.85	2026.12
4	- 0.8515	85.52	0.819	- 238.24	508.49	- 229.45	514.85
5	- 0.8515	83.88	0.819	933.08	927.42	958.68	938.90
6	- 0.8515	82.23	0.819	292.77	200.76	316.34	201.01
7	- 6.40	85.52	8.05	- 256.61	371.76	- 268.32	382.60
8	- 6.40	83.88	8.05	1161.06	759.20	1109.64	756.21
9	- 6.40	82.23	8.05	- 430.27	2099.68	- 438.97	2095.14

表 4 叶身应力 MPa

序 号	坐 标 (mm)			用过渡元解		全体元解	
	x	y	z	σ_y	σ_e	σ_y	σ_e
1	- 0.802	110.6	5.37	9.92	21.85	9.16	23.81
2	- 7.80	106.35	5.66	75.56	85.22	75.15	86.73
3	- 7.73	102.10	6.048	146.45	148.50	144.89	148.38
4	- 7.44	97.86	6.323	172.94	173.87	173.65	175.67
5	- 7.28	93.605	6.833	179.09	194.85	185.12	196.67
6	0.057	89.36	3.37	225.04	243.90	218.25	244.56
7	- 4.71	89.36	5.96	248.05	260.78	255.94	267.54
8	- 6.04	89.36	6.94	263.21	297.18	250.79	276.14
9	- 3.568	86.90	5.49	285.59	407.51	293.36	372.15
10	- 5.78	86.90	7.42	378.48	455.84	407.25	430.06
11	- 4.52	86.90	6.39	295.58	438.80	310.82	409.82

从表 3、表 4 可以看出: 采用过渡元的计算应力与其它两种单元的计算结果相吻合。

以上两例可见本文所建立的公式及编程的正确性。采用过渡元计算的应力在较薄的叶身部位与全壳元的计算结果相吻合, 在较厚的叶根部与全体元的计算结果相近, 这表明采用本文建立的过渡元计算壳体法线与一个材料主轴重合的正交异性体—壳组合结构是合理和有效的。值得强调的是, 对于图 3 所示叶片, 采用过渡元计算所用机时为 2 分钟, 而采用全体元的。

参 考 文 献

1 尹泽勇, 杨治国, 陆波. 采用壳体应变—应力状态的体—壳过渡元. 航空学报, 1993, 14(10): 477- 483
2 王振鸣. 复合材料力学及复合材料结构力学. 北京: 机械工业出版社, 1990

(责任编辑 杨再荣)