

叶片—盘—轴整体转子振动特性分析*

上海复旦大学

株洲航空动力机械研究所

张文** 王文亮 王皓 唐炯

陈运西 陈少红

【摘要】 提出分析盘—片—轴全弹性整体转子系统动力特性的新方法。采用刚盘—轴组件和盘—片组件作为两个子结构,应用模态综合,导出了整体转子的运动方程,求解了相应的广义陀螺特征值问题,求得涡动频率、涡动模态和临界转速,判断了正、负进动。对盘—片组件执行了几何非线性大变形分析,求出动平衡位置和切线刚度阵,准确计算了离心力的刚度效应。利用盘—片组件的回转对称性,采用群论算法,把自由度缩聚到一个扇区,克服了算机容量的困难。编制了盘—片—轴耦合振动的大型有限元程序。进行了盘—片—轴耦合振动的试验研究,试验与计算结果一致。

关键词: 叶片 转子 振动分析 模态综合法 轴

近代航空发动机高转速、轻结构的设计趋势需执行盘—片—轴耦合系统的动力分析,以免叶片和转子预测频率的失真造成设计参数的不佳选择。盘—片—轴耦合振动分析主要难点:一是如何描述盘—片弹性变形和刚体运动的惯合(包括陀螺效应耦合),二是为准确计算离心力刚度效应,需对盘—片组件作空间有限元模型下的几何非线性大变形分析^[1,2]。国外文献常回避这类难点^[3~7]。本文采用旋转坐标系中盘—片组件的扇区模态和静止坐标系中刚盘—轴的振动模态的模态综合,提出了分析盘—片—轴全弹性耦合系统动力分析新方法,对若干型号航空发动机作了实物转子计算及模型转子的试验研究。两者的一致性证实了本方法的可靠性。

1 高速自旋体几何非线性动力分析

设坐标系 $o-xyz$ 与物体一起旋转, $r = [x, y, z]^T$ 和 $P(x, y, z) = [u, v, w]^T$ 表示物体上任一点在 $o-xyz$ 系中观察的变形前位置向量和变形位移,有限元模型下,变形位移应表示为 $P(x, y, z) = N(x, y, z)\delta$ 其中 δ 是全体结点位移的广义坐标集, N 是形函数。对高速旋转弹性体,需计及物体的非线性大变形,由其非线性应变能^[2]及物体的动能^[8]导得自旋体的普遍运动方程为

$$M\ddot{\delta} + G\dot{\delta} + (\partial/\partial\delta) - K_{\Omega}\delta = A \quad (1)$$

此处 M 和 K_{Ω} 为惯性阵和离心刚度阵,均为正定对称阵, G 是反对称陀螺力阵, A 是广义离心力向量。取 $\delta_0 = \dot{\delta}_0 = 0$, 由(1)得动平衡位置 δ_0 满足 $(\partial/\partial\delta)|_{\delta_0} - K_{\Omega}\delta_0 - A = 0$, 可用 Newton-Raphson 迭代法^[12]求出 δ_0 。令 $\delta = \delta_0 + q(t)$ 代入(1), 保留一阶小量,得 δ_0 附近的扰动运动方程为 $M\ddot{q} + G\dot{q} + K_T(\delta_0)q = 0$, 此处 $K_T(\delta_0) = K_0 + K_L(\delta_0) + K_{\sigma}(\delta_0) - K_{\Omega}$ 其中 K_0 是线性刚度阵, K_L 和 K_{σ} 是大位移刚度阵和几何刚度阵。对许多盘—片结构,有 $P^T\Omega P \approx 0$, 于是可略去(1)中的陀螺项,方程简化为下式,为了识别方便,已把 M 、 $K_T(\delta_0)$ 和 q 分别记为 M_d 、 K_d 和 q_d 。

$$M_d \ddot{Q}_d + K_d Q_d = 0 \quad (2)$$

2 回转对称结构的自由度缩聚、刚盘—柔轴组件振动特性

每个 N 阶回转对称结构可分成 N 个相同扇区, 记包含界面 w_j 而不含界面 w_{j+1} 的扇区为 s_{j0} 。同时含界面 w_j 和 w_{j+1} 的为“扩充扇区” $\bar{s}_j$, 对每个扇区作相同的有限元划分并建立相同的专用坐标系。设在专用坐标系中每个扇区的结点广义坐标集为 q_j , 整个结构的广义坐标集 $q_d = \text{col}\{q_j\}$, 依 C_N 群论理论^[6], (2) 中的 M_d 和 K_d 均呈下列块循环对称性:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 & \cdots & 0 & C_2^T \\ C_2^T & C_1 & C_2 & \cdots & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 & 0 \cdots & C_2^T & C_1 \end{bmatrix}_{nN \times nN}$$

C_1 和 C_2 都是 $n \times n$ 方阵, n 是扇区 s_j 的自由度数。采用 C_N 群的下列 N 个不可约子空间基向量

$$V = 1/\sqrt{N} [V_0, V_1, \cdots, V_{N-1}] \quad , \quad V_r = \text{col}\{e^{ir(j-1)\alpha} I_n\} \quad , \quad \alpha = 2\pi/N \quad (3)$$

C 可藉 V andemonde 变换块对角化: $V^* C V = \text{block-diag}\{U_r\}$, $U_r = C_1 + C_2 e^{ir\alpha} + C_2^T e^{-ir\alpha}$ 。 U_r 是 Hermitian 阵, 且 $U_{N-r} = U_r$ 当 $r=0$ 和 $r=N/2$ (如果 N 是偶数), U_r 退化为实对称阵。因此, 在坐标变换 $q_d = V Z$, $Z = \text{col}\{Z_r\}$ 之下, 式(2)被解耦成 $(N-1)/2$ 个独立的 n 阶 Hermitian 广义特征值问题

$$(B_r - \omega^2 A_r) Z_r = 0 \quad , \quad r = 1, \cdots, [(N-1)/2] \quad (4)$$

以及实对称广义特征值问题: $(B_0 - \omega^2 A_0) Z_0 = 0$, $(B_{N/2} - \omega^2 A_{N/2}) Z_{N/2} = 0$ 。这里 $V^* M_d V = \text{block-diag}\{A_r\}$, $V^* K_d V = \text{block-diag}\{B_r\}$ 。设(4)的 r 节径复特征向量集为 $Z_r = [Z_{r1}, -iZ_{r1}, Z_{r2}, -iZ_{r2}, \cdots, Z_{rn}, -iZ_{rn}]$ 。则在扇区 s_j 和扩充扇区 $\bar{s}_j$ 上的对应的 r 节径物理实模态分别为:

$$\begin{aligned} X_{rj} &= \sqrt{2/N} \text{Re}(Z_r) [\tilde{I}_{2n} \cos r(j-1)\alpha - \tilde{I}_{2n} \sin r(j-1)\alpha] \\ X_{rj} &= \sqrt{2/N} \text{Re}(\tilde{Z}_r) [\tilde{I}_{2n} \cos r(j-1)\alpha - \tilde{I}_{2n} \sin r(j-1)\alpha] \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\tilde{I}_{2n} = \text{diag}(\tilde{I}_2)$, $\tilde{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\tilde{Z}_r = \begin{bmatrix} I_w & 0 \\ 0 & I_g \\ I_w e^{ir\alpha} & 0 \end{bmatrix} Z_r$

刚盘—柔轴组件振动特性是常规转子动力学问题, 这里仅罗列所需结果。设轴的有限元模型的结点广义坐标集为 δ_s , 其动能、势能和运动方程分别为^[8]:

$$T = (1/2) \dot{\delta}_s^T M_s \dot{\delta}_s + (\Omega/2) \dot{\delta}_s^T G_s \dot{\delta}_s \quad , \quad V = (1/2) \delta_s^T K_s \delta_s \quad (6)$$

$$M_s \ddot{\delta}_s + \Omega G_s \dot{\delta}_s + K_s \delta_s = 0 \quad (7)$$

取 $\Omega \neq 0$, 得振动特征值问题为

$$(K_s - \omega^2 M_s) \delta_s = 0 \quad (8)$$

由(8)解出 $2n_s$ 个二重特征根 ω_j^2 及对应的二个独立特征向量 $\mathcal{Q}_{2j-1}$ 和 $\mathcal{Q}_{2j} = \tilde{I}_{2n_s} \mathcal{Q}_{2j-1}$ 。这里 n_s 是轴的有限元模型结点数。而总的模态集为 $\Phi = [\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \cdots, \mathcal{Q}_{2n_s-1}, \mathcal{Q}_{2n_s}]$

3 盘—片—轴整体系统的运动方程

3.1 伴有刚体运动的弹性盘—片运动的扇区模态描述

取静止坐标系 $O- i, j, k$, 伴随盘—片作刚体运动的运动坐标系 $A- \xi, \eta, \zeta$ 。 ξ 沿盘—片的法向 n , 盘—片的刚体扰动运动由基点 A (第 j 结点) 的平动 $y_{ij} + b_{jk}$ 和 n 的角位移 $\alpha_{ij} + \beta_{jk}$ 表示, 于是, 基点 A 的平动速度和刚体角速度在运动坐标系上的投影分别为^[8]

$$[v_\eta, v_\xi]^T = R_\alpha [y, z]^T \quad , \quad [w_\eta, w_\xi]^T = R_\alpha [\dot{\alpha}, \dot{\beta}]^T \quad , \quad \omega_\xi = \Omega + (\dot{\alpha}\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta})/2 \quad (9)$$

盘一片上任一点 P 相对于基点 A 的初始位置 r_P 和变形位移 P 在旋转坐标系上的投影是 $r_P = [\xi, \eta, \zeta]^T$ 和 $P = [u, v, w]^T$, 对盘一片上每个扇区而言, ξ, η, ζ 是整体坐标系, 可取它为基本扇区(第一扇区)的专用坐标系, 它与第 k 扇区的专用坐标系 ξ_k, η_k, ζ_k 之间的转换关系为

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = R_k \begin{bmatrix} \xi_k \\ \eta_k \\ \zeta_k \end{bmatrix}^T, \quad R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(k-1)\alpha & -\sin(k-1)\alpha \\ 0 & \sin(k-1)\alpha & \cos(k-1)\alpha \end{bmatrix}$$

在 k 扇区的专用坐标系中表出的变形位移 P_k 为

$$P_k = [u_k, v_k, w_k]^T = N [q_{w_k}, q_{g_k}, q_{w_k}']^T = NA [q_{w_k}, q_{g_k}, q_{w_{k+1}}] = \bar{N} \bar{q}_k$$

其中 N 是扇区内形函数阵, $\bar{q}_k$ 是扩充扇区 $\bar{s}_k$ 的结点广义坐标集, q_{w_k}' 和 $q_{w_{k+1}}$ 分别是界面 $w_k' = w_{k+1}$ 上的结点广义坐标集在 s_k 和 s_{k+1} 扇区的专用坐标系中的投影, 它们满足 $q_{w_k}' = R_w q_{w_{k+1}}$, 故 $A = \text{diag}\{I_w, I_g, R_w\}$ 。于是, 在整体坐标系 ξ, η, ζ 中该变形位移可表为

$$P|_{s_k} = R_k P_k = R_k \bar{N} \bar{q}_k \quad (10)$$

盘一片结点变形形态 $\bar{q}_k$ 可用盘一片振动主模态迭加而得。回转对称结构的 $r \geq 2$ 的变形形态不会与刚体运动耦合^[9], $r = 0$ 的变形形态也只与轴向刚体位移耦合, 而这一刚体位移本文是不考虑的。因此, 在分析盘一片一轴耦合振动时, 只需计入盘一片组件的单节径($r = 1$)的振动模态 χ_i 。对 k 扇区, 在专用坐标系中得 $\bar{q}_k = \chi_i C$, C 是单节径模态坐标集, 代入(10)得

$$P|_{s_k} = R_k \bar{N} \chi_i C = R_k \bar{N} \sqrt{2/N} \text{Re}(\tilde{Z}_1) [\tilde{I}_{2s} \cos(k-1)\alpha - \tilde{I}_{2s} \sin(k-1)\alpha] C \quad (11)$$

这里, 依模态综合思想, $\tilde{Z}_1$ 中只取前 $2s$ 个单节径主模态, $s \ll n_0$ 。

3.2 用扇区模态坐标集表示的弹性盘一片动能和应变能

盘一片上任一点的绝对速度在 ξ, η, ζ 系中为

$$\dot{V} = \dot{V}_A + \dot{\Omega} r + \dot{\Omega} P + \dot{P} \quad (12)$$

$r = [\xi, \eta, \zeta]^T$ 是该点相对于 A 点的位置向量在 ξ, η, ζ 系中的投影。将(9)和(11)代入(12), 并令

$$C = R q_2, R = \text{diag}(s) \{R \Omega\}, \dot{C} = R (q_2 - \Omega \tilde{I}_{2s} q_2), \text{代入动能表达式逐项积分, 并利用 } \sum_{k=1}^N \cos^2(k-1)\alpha = \sum_{k=1}^N \sin^2(k-1)\alpha = \frac{N}{2}, \sum_{k=1}^N \cos(k-1)\alpha = \sum_{k=1}^N \sin(k-1)\alpha = \sum_{k=1}^N \cos(k-1)\alpha \sin(k-1)\alpha = 0, \text{得动能}$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (13)$$

$$T_1 = \frac{m}{2} (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{L_g}{2} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + m d (\dot{y} \dot{\beta} - \dot{z} \dot{\alpha}) + \frac{\Omega}{2} J_P (\dot{\alpha} \dot{\beta} - \dot{\alpha} \dot{\beta}) \quad (14)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}_2^T \dot{q}_2 + \Omega \dot{q}_2^T (A_1 - \tilde{I}_{2s}) q_2 + \frac{\Omega^2}{2} \dot{q}_2^T (I_{2s} + 2\tilde{I}_{2s} A_1) q_2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^T \chi_i^T K \Omega \chi_i q_2 \quad (15)$$

$$T_3 = [\dot{y} \quad \dot{z}] A_3 \dot{q}_2 + [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}] A_4 \dot{q}_2 + \Omega [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta}] (A_5 - A_4 \tilde{I}_{2s}) q_2 \quad (16)$$

其中, T_1 是刚体动能, T_2 是纯变形动能, T_3 是耦合动能。

$$A_j = \Pi_j + \tilde{I}_{2s} \Pi_j \tilde{I}_{2s} \quad (j = 1, 2), \quad A_j = \Pi_j + \tilde{I}_{2s} \Pi_j \tilde{I}_{2s} \quad (j = 3, 4, 5)$$

$$\Pi_j = \text{Re}^T(\tilde{Z}_1) \int_1 \rho \bar{N}^T R_j \bar{N} dV \text{Re}(\tilde{Z}_1) \quad (j = 1, 2)$$

$$\Pi_j = \sqrt{N/2} \int_1 \rho R_j \bar{N} dV \text{Re}(\tilde{Z}_1) \quad (j = 3, 4, 5)$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad R_3 = [0 \quad I_2]$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} \zeta & 0 & -\bar{\zeta} \\ -\eta & \xi & 0 \end{bmatrix}, \quad R_5 = - \begin{bmatrix} \eta & \xi & 0 \\ \zeta & 0 & \bar{\xi} \end{bmatrix}$$

由 $K_T(\delta_0)$ 式知, 在动平衡位置附近的盘—片扰动应变能为

$$V = (1/2)q^T (\partial^2 / \partial q^2) |_{\delta_0} q = (1/2)q_2^T [\Lambda_{d1(2s)} + X^T K_{\Omega} X] q_2 \quad (17)$$

以上是单盘一片的结果, 对每个盘—片都需作上述分析。

3.3 盘—片—轴系统模态综合运动方程

取轴的模态坐标转换为

$$\delta_s = \Phi q_1 \quad (18)$$

其中 $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{m-1}, \Phi_m]$, 为刚盘—轴的 m 对主模态 ($m \ll n_r$), 把 (18) 代入 (6) 和 (13), 得盘—片—轴系统在模态坐标下的总动能和应变能为

$$T = (1/2)\dot{q}^T M \dot{q} + \Omega \dot{q}^T H q + (\Omega^2/2)q^T M_c q, \quad V = (1/2)q^T K q \quad (19)$$

其中

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \text{col}\{q_{2j}\} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} I_{2m} & \frac{1}{2}\Phi^T \text{row} \begin{bmatrix} E_j^T [A_3 \\ A_4] \end{bmatrix} \\ \text{对 称} & \text{diag}(I_{2s}) \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Phi^T G_r \Phi & \Phi^T \text{row} \begin{bmatrix} E_j^T [0 \\ A_5 - A_4 \tilde{I}_{2s}] \end{bmatrix} \\ 0 & \text{diag}(A_1 - \tilde{I}_{2s}) \end{bmatrix}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(I_{2s} + 2\tilde{I}_{2s} A_1) \end{bmatrix}, \quad K = \text{diag}(\Lambda_{r(2m)}, \text{diag}\Lambda_{d1(2s)})$$

$\Lambda_{r(2m)}$ 和 $\Lambda_{d(2s)}$ 分别是刚盘—轴子系统和各个弹性盘—片子系统的固有频率对角阵。 E_j 是布尔阵, 表示第 j 个盘片组件的基点 A (轴上 j 结点) 的广义坐标 δ_j 在 δ 中的位置号码: $\delta_j = E_j \delta_0$ 。于是, 盘—片—轴全弹性耦合系统模态综合下的运动方程, 相应的广义陀螺特征值问题是为

$$M \ddot{q} + \Omega G \dot{q} + (K - \Omega^2 M_c) q = 0$$

$$(-\omega^2 M + i\omega \Omega G + K - \Omega^2 M_c) q_0 = 0 \quad (20)$$

其中 $G = H - H^T$, 当 $K - \Omega^2 M_c$ 是正定阵时, 特征值 ω 是实数, q_0 是复特征向量^[10]。显然, $-\omega$ 和 $\bar{q}_0$ 也是 (20) 的解, 但物理上代表同一运动, 故只需讨论 $\omega > 0$ 的解。由 (18) 得轴上任一点的复位移为 $\delta = [y, z, \alpha, \beta]^T = E \Phi q_1$, 正进动的判断条件是^[8] $\text{Im}(y_j \bar{z}_j) > 0$ 。

4 算例与试验研究

用上述理论编制了有限元程序 DA SOBD, 为检验本理论与程序, 设计加工了一个试验转子, 实测和计算两者十分一致。试验转子结构见图 1。一个 8 叶片平板盘—片, 固定在简支轴左端 1/4 长度处。图 2 是算出的该转子系统的 Campbell 图。它表示算出的涡动频率曲线 $\omega_i(\Omega)$ ($i = 1, \dots, 8$)。其中正进动曲线与 $\omega = \Omega$ 的交线是临界转速计算值, 实验测定了该系统不旋转状态时的横振动固有频率和旋转状态下的临界转速值, 实验值亦画于图 2 中。两者的一致性证实了本理论与本程序的可靠性。又执行了一个某发动机低压涡轮转子工程应用算例, 图 3 是算出的 Campbell 图。

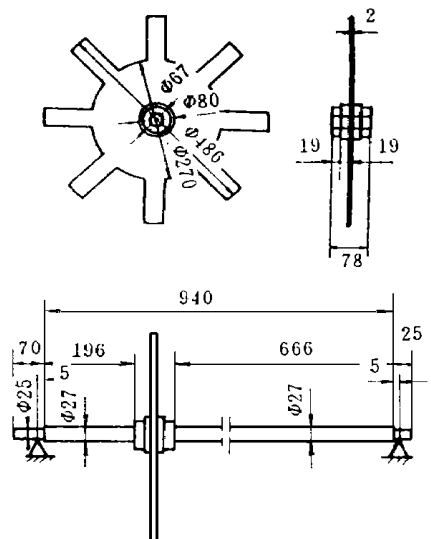


图 1 试验转子结构

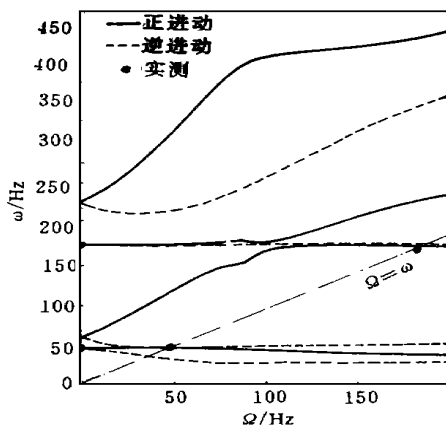


图2 试验转子 Campbell 图

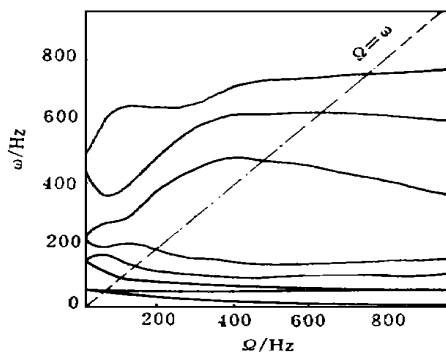


图3 低压涡轮转子的 Campbell 图

参 考 文 献

- 1 谢贻权, 何福保等 弹性和塑性力学中的有限单元法 北京: 机械工业出版社, 1988
- 2 龚尧南, 王寿梅 结构分析中的非线性有限元素法 北京航空航天大学出版社, 1986
- 3 Khader N, Loewy R G. Shaft Flexibility Effects on the Forced Response of A Bladed-Disk Assembly. Journal of Sound and Vibration, 1990, 139(3): 469- 485
- 4 Crawley E F, Duchame E H, Mokadam D-R. Analytical and Experimental Investigation of the Couple Blade Disk/Shaft Whirl of A Cantilevered Turbofan. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1986, 108: 567- 571
- 5 Lowey R G, Khader N. Structural Dynamics of Rotating Bladed-Disk Assemblies Coupled with Flexible Shaft Motions. AIAA J., 1984, 22(9): 1319- 1325
- 6 王文亮等 盘-片耦合系统固有模态分析— C_N 群上对称结构的模态综合. 固体力学学报, 1988(1)
- 7 Thoma D L. Dynamics of Rotationally Periodic Structure. International Journal for numerical Methods in Engineering, 1979: 81- 102
- 8 张文 转子动力学理论基础 北京: 科学出版社, 1991
- 9 胡海昌 多自由度结构固有振动理论 北京: 科学出版社, 1987
- 10 张文, 张慧生等 大型陀螺特征值问题的一个高效算法. 航空动力学报, 1993, 9(2)

(责任编辑 魏星禄)