

大型陀螺特征值问题的一个高效算法*

上海复旦大学 张 文** 张慧生 包华丽

【摘要】 提出了求解大型广义陀螺特征值问题的一个高效算法。先通过平面镜象变换,把 N 阶反对称阵化为 n 阶三对角形式的反对称阵,再利用这个特殊形式的反对称阵,把问题化为 $[n/2]$ 阶的三对角正定对称阵的普通特征值问题,大大节约了计算机容量和运算时间。计算实例证实了本方法的快速和高效性。

主题词: 陀螺理论 特征值 算法 转子

1 序 言

对盘—片—轴耦合系统作动力分析,导致求解下列特征值问题^[1]

$$(\lambda^2 M + \lambda G + K)q = 0 \quad (1)$$

其中 M 、 K 是正定对称阵, G 反对称阵。(1)可改写为

$$(\lambda F + E)Z = 0 \quad (2)$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} M & \\ & K \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} G & K \\ -K & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} \lambda q \\ q \end{bmatrix}$$

F 是正定对称阵, E 反对称阵, Z 状态向量。对正定阵作 Cholesky 分解 $F = LL^T$, 式(2)化为

$$(N + B)X = 0 \quad (3)$$

$B = L^{-1}EL^{-T}$, $X = L^T Z$, B 是反对称阵。(3)称为标准陀螺特征值问题。以后我们只讨论标准陀螺特征值问题。转子动力学中涉及高转速转子系统的涡动分析,都要涉及陀螺特征值问题,对陀螺特征值问题的研究远不如振动特征值问题那样成熟与完善。Paardekooper^[2]提出了拟 Jacobi 法; Gupta^[3,4]利用了 Sturm 序列的迭代; Bauchau^[5]把 Lanczos 法作了推广。上述诸方法主要适用于小型陀螺特征值问题。Meirovitch^[6]把 n 阶陀螺特征值问题化到同阶的正定对称阵的普通特征值问题,从而可套用后者的许多成熟算法与程序,但运算中要涉及 n 阶矩阵求逆,因此问题阶数不能过大。

本文提出求解(3)的一个新算法,把 n 阶陀螺特征值问题简化到 $[n/2]$ 阶的正定对称阵的普通特征值问题。主要利用了平面镜象变换。本方法保留了 Meirovitch 方法的优点,而且减缩掉问题的一半阶数,从而适用于求解大型陀螺特征值问题。

2 反对称阵的三对角化、陀螺特征值问题的转换

采用平面镜角变换(Householder 变换)^[7],可把反对称阵三对角化。设两个模长相等的 r 维向量 $u_r = [u_1, \dots, u_r]^T$ 和 $v_r = [v_1, \dots, v_r]^T$, 满足 $|u_r| = |v_r|$, 于是,平面镜象变换可把 u_r 变换成 v_r :

$$v_r = Q_r u_r \quad (4)$$

$$\text{其中 } Q_r = I_r - 2\{ (u_r - v_r)(u_r - v_r)^T / [(u_r - v_r)^T(u_r - v_r)] \} \quad (5)$$

不难直接证明, Q_r 是正交对称阵。设反对称阵 B 的元素是 b_{ij} , 取 $n-1$ 维向量

$$u_{n-1} = [b_{12}, \cdots, b_{1n}]^T, \quad v_{n-1} = [b_1, \cdots, 0]^T \quad (6)$$

$$\text{其中 } b_1 = \sum_{j=2}^n b_{1j}^2. \text{ 把(6)代入(5), 得 } Q_{n-1}, \text{ 取 } H_1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & Q_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{于是 } H_1^T B H_1 = H_1^T \begin{bmatrix} 0 & u_{n-1}^T \\ -u_{n-1} & B_{n-1}^{(0)} \end{bmatrix} H_1 = \begin{bmatrix} 0 & v_{n-1}^T \\ -v_{n-1} & B_{n-1}^{(0)} \end{bmatrix}$$

其中 $B_{n-1}^{(1)} = Q_{n-1}^T B_{n-1}^{(0)} Q_{n-1}$ 。重复上述步骤, 其中取 $H_r = \begin{bmatrix} I_r & \\ & Q_{n-r} \end{bmatrix}$, 经 $n-2$ 次 Householder 变换, B 就被化成三对角反对称阵

$$P = H^T B H = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & & & \\ -b_1 & 0 & b_2 & & \\ & -b_2 & 0 & b_3 & \\ & & & & 0 & b_{n-1} \\ & & & & -b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中 $H = H_1 H_2 \cdots H_{n-2}$ 仍是正交对称阵。

不难证明, 陀螺特征值问题(3)的特征根是纯虚数 $\lambda = i\omega$, 现令 $x = Hq$ 代入(3), 得

$$(i\omega I + P)q = 0 \quad (8)$$

其中 P 为(7)式。 P 是一个十分特殊的反对称阵, 如果把 q 中的奇数序元素与偶数序元素分别集中依序排列, (8)可改写为

$$\begin{bmatrix} -P_d^T \\ P_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^d \\ q^e \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} q^d \\ q^e \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

其中 $q^d = \text{col}_{j \text{ 奇数}}\{q_j\}$, $q^e = \text{col}_{j \text{ 偶数}}\{q_j\}$,

$$P_d = \begin{bmatrix} -b_1 & b_2 & & & \\ & -b_3 & b_4 & & \\ & & & & \\ & & & & b_{n-2} \\ & & & & b_{n-1} \end{bmatrix}_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} \quad (n \text{ 为偶数时})$$

$$P_d = \begin{bmatrix} -b_1 & b_2 & & & \\ & -b_3 & b_4 & & \\ & & & & \\ & & & & -b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix}_{\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}} \quad (n \text{ 为奇数时}) \quad (10)$$

打开(9), 并由此得

$$(A - \omega^2 I)q^e = 0, \quad q^d = -(i/\omega)P_d^T q^e \quad (11)$$

其中 $A = P_d P_d^T$

$$A = \begin{bmatrix} b_1^2 + b_2^2 & -b_2b_3 & & & \\ -b_2b_3 & b_3^2 + b_4^2 & -b_4b_5 & & \\ & -b_4b_5 & & & \\ & & b_{n-3}^2 + b_{n-2}^2 & -b_{n-1}b_{n-2} & \\ & & -b_{n-2}b_{n-1} & b_{n-1}^2 & \end{bmatrix} \quad (n \text{ 为偶数时})$$

$$A = \begin{bmatrix} b_1^2 + b_2^2 & -b_2b_3 & & & \\ -b_2b_3 & b_3^2 + b_4^2 & -b_4b_5 & & \\ & -b_4b_5 & & & \\ & & b_{n-4}^2 + b_{n-3}^2 & -b_{n-3}b_{n-2} & \\ & & -b_{n-3}b_{n-2} & b_{n-2}^2 + b_{n-1}^2 & \end{bmatrix} \quad (n \text{ 为奇数时})$$

A 是一个 $[n/2]$ 阶的正定对称阵, 这样, 就把 n 阶陀螺特征值问题(3)简化为 $[n/2]$ 阶的正定对称阵的普通特征值问题(11), 大大地降低了自由度。而且, 由于 A 是三对角稀疏阵, 可套用许多有效的现成程序求解, 因此, 该法改善了 Meirovitch 方法。由(11)求出特征根 $\pm\omega$ 和特征向量 q_{e_j} 后, 由(11)求出 q_{d_j} , 把 q_e 和 q_d 的元素重新交叉排列成 q_j 后, 即求得陀螺特征值问题的特征解

$$\lambda_j = \pm \omega, \quad x_j = H q_j \quad (12)$$

当 n 为偶数时, 用上述方法可求出全部特征解。当 n 为奇数时, A 的阶数为 $(n-1)/2$, 故用上述方法仅解出(3)的 $n-1$ 个根, 还有一个是零特征根 $\lambda_n = 0$, 此时(9)退化

$$P_d q_d = 0, \quad P_d^T q_e = 0 \quad (13)$$

此处 P_d 取(10)。它的秩是 $(n-1)/2$, 故(13)第2式只有零解 $q_{e_n} = 0$, 而(13)第1式有非零解 q_{d_n} , 由此得特征向量。

本方法不仅保留了 Meirovitch 方法的优点, 即把问题转化为正定对称阵的普通特征值问题, 而且利用了反对称阵特征根正负成对出现的性质, 把问题阶数降低了一半, 大大节省了算机容量和算时, 因此, 本方法特别适用于求解大型陀螺特征值问题。

3 算 例

把上述算法编制了程序, 进行了实例计算。

算例1 取式(2)中的 F 和 E 为文献[6]中的实例, 由此算出式(3)中的 B 为

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -50 & -60 & 0 & 0 & 18.9737 \\ 50 & 0 & 0 & -60 & -18.9737 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18.9737 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ -18.9737 & 0 & 0 & 0 & -25 & 0 \end{bmatrix}$$

求出的特征值和特征向量如表1, 它和文献[6]完全一致。

表 1 特征值和特征向量

$\omega_1= 2.5236$		$\omega_2= 33.8111$		$\omega_3= 111.3348$	
u_1	v_1	u_1	v_1	u_1	v_1
0	- 0.0607	0.0425	0	- 0.0750	0
- 0.0607	0	0	- 0.0425	0	0.0750
3.1873	0	0	3.5625	0	4.5989
0	- 3.1872	3.5625	0	4.5989	0
0	0.4860	0.8684	0	0.0990	0
0.4860	0	0	- 0.8684	0	- 0.990

算例 2,构造反对称阵 B 为

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -20 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & -4 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ -4 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -4 & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

求得正特征值为 $\omega = 8.0000, \omega = 16.0001, \omega = 24.0001, \omega = 32.0000$, 精确到 0.0001。

参 考 文 献

1 张文,王文亮等.叶片—盘—轴整体转子振动特性分析.航空动力学报,1993,9(2)

2 Paardekooper M E C. An Eigenvalue Algorithm for Skew-Symmetric Matrices. Numer. Math., 1971, 17: 189- 202

3 Gupta K K. On A Combined Sturm Sequence and inverse Iteration Technique for Eigenproblem Solution of Spinning Structures. Int. J. Numerical Methods in Engineering, 1973, 7(7): 509- 518

4 Gupta K K. Eigenproblem Soltuion of Damped Structural Systems. Int. J. Numerical Methods in Engineering, 1974, 8: 877 - 911

5 Bauchau O A. A Solution of the Eigenproblem for Undamped Gyroscopic Systems with the Lanczos Algorithm. Int. J. Numerical Mehtods in Engineering, 1986, 23: 1705- 1713

6 Meirovitch I. A New Method of Solution of the Eigenvalue problem for Gyroscopic Systems. AIAA. J., 1974, 12(10): 1337- 1342

7 Lancaster P. Lambda- Matrices and Vibrating Systems. Pergamm Press, Oxford, England, 1966

8 包华丽. 大型陀螺系统特征值问题的算法研究. [学位论文]: 复旦大学, 1991

(责任编辑 魏星禄)