

机动飞行时安装角对转子叶片振动的影响*

西北工业大学 夏遂勤** 吕文林

【摘要】 提出旋转转子叶片在轴线发生平面偏转时的振动问题。在非线性曲杆理论的基础上,建立了在陀螺力作用下叶片振动的微分方程及其求解方法,并进行了数值分析。结果表明,安装角在不同取值范围和不同转速范围对叶片振动的影响是完全不同的。对于无扭向叶片在低转速下,安装角对振动的影响是显著的;而在高转速下则是很微弱的。当安装角在某个较大的范围取值时,可有效地减弱该运动状态所导致的振动。

主题词: 安装角 叶片 振动 机动飞行

分类号: O322

统计资料表明,绝大多数一等空中事故都发生在飞机起降,拐弯等机动飞行状态^[1],特别注意到该状态下有文献[2, 3]报导的一类由于叶片折断导致的严重事故。还有1969年某型飞机空中拐弯时叶片折断造成一等事故。机动飞行时叶片(此时叶片处于复合转动状态)上作用的随时间周期性变化的陀螺力将使叶片发生受迫振动。文献[4]对复合转动状态的叶片振动进行了一定的研究,但计算模型和理论过于简单。为此本文借助于非线性曲杆理论,研究了有关复合转动时(扭曲)叶片的振动问题。建立了描述陀螺惯性力作用下弯曲振动的偏微分方程。并给出了不同特性参数情形安装角对无扭向叶片影响的数值计算结果,得到了一些有益的结论。

1 动力方程的确定及求解方法

现在来推导弹性悬臂扭曲叶片的运动方程,假定叶片与轮盘刚性联接;现引入下列右手直角坐标系: $OXYZ$ 座标原点位于转子中心的惯性座标系; $Oxyz$ 与转子紧固在一起。 Ox 轴线穿过叶片根部横截面中心; OZ 与转子轴线重合,并假定 OZ 和 Oz 重合。假设转子以常转速 ω 旋转,同时其轴线以常转速 ω 绕 OY 轴平面转动,且有 $\omega \ll \omega$ 。

由于叶片伸长引起的纵向位移远小于弯曲引起的挠度,因此纵向位移可以忽略。计及离心力作用对叶片运动的影响,现引入空间柔性扭曲杆运动方程的一般形式。取长为 ds 的微元,并将其与坐标系 (u, v, w) 相联,原点位于微元横截面的形心,坐标轴 w 沿弹性线切线方向, u 和 v 轴为横截面的主惯性轴。同时沿杆弹性线引入单位矢自然坐标系 $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{\tau})$, $\vec{n}$ 为其主法向, $\vec{b}$ 沿副法向, $\vec{\tau}$ 沿切向。单位矢量 $\vec{n}$ 与 u 轴之间的夹角用 χ 表示,弹性线上点的位置由叶片根部截面计起的坐标 s 确定。假定沿叶片弹性线 s 分布的惯性力载荷为 $\vec{f}(s)$ 。在载荷 $\vec{f}$ 、内弹力 $\vec{F}$ 和矩 $\vec{M}$ 作用下变形杆微元体 ds 的动平衡方程可写成下列形式^[5, 6]:

1995 年 4 月收到; 1995 年 12 月收到修改稿。 * 本文系中国博士后科学基金资助项目

** 西北工业大学 702 教研室 710072

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}}{ds} + \vec{\omega} \times \vec{F} + \vec{f} &= 0, \quad \frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{\omega} \times \vec{M} + \vec{\tau} \times \vec{F} = 0 \\ \frac{d\vec{\tau}}{ds} &= K\vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -K\vec{n} + \left[r - \frac{dX}{ds} \right] (\vec{\tau} \times \vec{n}), \quad \frac{d\vec{p}}{ds} = \vec{\tau} \end{aligned} \quad (1)$$

矩 $\vec{M}$ 可通过其在坐标轴 u , v 及 w 上的分量 M_u , M_v , M_w 与弯曲刚度 A , B 及扭转刚度 C 表示出来。方程组 (1) 有 15 阶, 但下列 3 个首次积分:

$$|\vec{\tau}| = 1, \quad |\vec{n}| = 1, \quad \vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2)$$

可使方程组降至 12 阶。因此为确立有关扭曲杆双边值问题务必给定 12 个独立边界条件。它们可从杆相应边界静力学和运动学条件来确定。

杆在复合转动下, 惯性力分布矢量 $\vec{f}(s)$ 由绝对加速度 $\vec{a}$ 和杆线密度 $\gamma(s)$ 来确定, 显然 $\vec{f}(s) = -\gamma(s) \vec{a}$, 根据哥氏公式^[7]可求出加速度 $\vec{a}$ 在坐标系 O_{xyz} 中各矢量分量的表达式。

以上方程组的边界条件: 叶片与转子刚性连接处位移为零, 边界条件可写为 ($s=0$):

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \tau(0) = 0, \quad \tau(0) = 0, \quad \tau(0) = 0$$

$$n_x(0) = 0, \quad n_y(0) = \frac{q(0)\sin\alpha + p(0)\cos\alpha}{p^2(0) + q^2(0)}, \quad n_z(0) = \frac{q(0)\cos\alpha - p(0)\sin\alpha}{p^2(0) + q^2(0)} \quad (3)$$

上述方程中只有 6 个方程是独立的。而在叶片的自由端 ($s=S$), 外力与矩等于零, 故:

$$\begin{aligned} F_u(S) &= 0, \quad F_v(S) = 0, \quad F_w(S) = 0 \\ p(S) &= 0, \quad q(S) = 0, \quad r(S) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

条件 $\omega \gg \omega$ 允许将叶片运动分成两个基本状态。第 1 状态, 以匀角速 ω 旋转时, 叶片在坐标系 O_{xyz} 中处于相对平衡状态, 假定弹性线与离心力方向一致, 仅仅受径向离心力 F_w , 对轮盘半径为 R , 线密度为 γ 杆, $F_w = 0.5\gamma\omega^2(S-s)(2R+S-s)$ 。第 2 个状态, 在该状态由偏转角速度 ω 引起的陀螺力, 使得叶片在第 1 状态的“邻近”发生了相对于第 1 个状态的弯曲微振。这样对运动状态的分解可对方程 (1) - (4) 在第 1 个状态的邻域内进行线性化并用之描述叶片在第 2 个状态的运动特性。为此将 (1) 前两个方程和其余矢量方程分别在 (u , v , w) 与 O_{xyz} 坐标系中展成标量方程, 并同边界条件一起做线性化处理。

(1) - (4) 的线性化方程组包含有对两个独立的变量 s 和 t 导数, 使得这个线性化系统成为一个偏微分方程组。为将该线性化方程组化为相对于矢量函数 $\vec{x} = (\Delta F_u, \Delta F_v, \Delta F_w, \dots, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 的常微分方程组求解, 将其每个分量表示成 $x_i(s, t) = x_i^s(s) \sin\omega t + x_i^c(s) \cos\omega t$ 。这里 $i = 1, 2, \dots, N$; $N = 15$ 为求解函数的数量。把函数 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 作为坐标, 利用投影法和平均法对 (1) - (4) 的线性化方程组进变换, 可得到 30 阶对变量 s 的常微分方程组:

$$\vec{x}' = A(s)\vec{x} + \omega\vec{f}(s) \quad (5)$$

这里 $A(s)$ 为系数矩阵; $\vec{f}(s)$ 为等式右侧矢量, 可由加速度增量形式表示出来, $\vec{x}$ 上角的撇代表对 s 的导数。

由方程 (3) 和 (2) 可推导出方程组 (5) 在 $s=0$ 的线性化边界条件:

$$B\vec{x}(0) = 0, \quad D\vec{x}(0) = 0 \quad (6)$$

由方程 (6) 可得到 $s=S$ 上的线性化边界条件:

$$F\vec{x}(S) = 0 \quad (7)$$

这里矩阵 B , D 和 F 相应的维数为 12×30 , 6×30 , 12×30 。

为求解 $\vec{x}(s)$ ^[6] 我们由分量 $x_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, 30$) 中选取这样 12 个分量 $x_j(s)$, x_j

(0) 的任意取值都不破坏方程 (6)。将未知量 $x_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, 30$) 重新编序, 以便序号 j 按下列顺序 $j = 1, 2, \dots, 12$ 取值, 式 (5) - (7) 解可表示成下列形式: $\vec{x}(s) = \vec{y}^\omega \vec{\omega} + \vec{Y}(s) \vec{C}$ 。这里 $\vec{y}^\omega(s)$ 为以下方程组在零边界条件时 Cauchy 问题的解:

$$d\vec{y}^\omega/ds = A(s)\vec{y}^\omega + \vec{f}(s) \quad (8)$$

$Y(s)$ 为以下方程组大小为 30×12 的解矩阵:

$$d\vec{y}/ds = A(s)\vec{y} \quad (9)$$

此时, 取初始条件 $y_j(0) = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{12})$ ($= 1, 2, \dots, 12$) 为独立变分条件, 其余变量 $y_i(0)$ ($i = 13, 14, \dots, 30$) 初始条件由公式 (6) 确定。 δ_i 为 Cronecker 符号。常矢 $\vec{C} = (C_1, C_2, \dots, C_{12})^T$ 这样选定, 以便满足由 (7) 得出的方程: $\omega F \vec{y}^\omega(s) + F \vec{Y}(s) \vec{C} = 0$ 。解决该应用的问题的难点在于建立矩阵函数 $Y(s)$ 和矢量函数 $\vec{y}^\omega(s)$ 。它们用 11 阶 Everhart 法积分方程组 (8)、(9) 求得。

2 算例及结果分析

选取了下列转子的几何和物理参数: 曲率 $p = q = 0$, 叶片长度 $S = 1$ m, 假定叶片为常截面, 取弯曲刚度 $A = 875 \text{ N} \cdot \text{m}^2$, $B = 21875 \text{ N} \cdot \text{m}^2$, 扭转刚度 $C = 1179.9 \text{ N} \cdot \text{m}^2$, 材料密度 $\rho = 7.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 转子工作转速为 $0 \leq \omega \leq 300 \text{ rad/s}$, 转轴偏转角速度 $\omega = 2.5 \text{ rad/s}$; 叶片安装角 $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$; 轮盘半径 $R = 0.05 \text{ m}$; 为便于分析安装角的影响, 取叶片为无扭向, 即扭角 $\varphi = 0$ 。这里叶片安装角 α 指的是叶片根部截面主惯性轴 u (接近于叶弦方向) 与旋转平面 (或 y 轴) 的夹角; 叶片扭角 φ 指的是尖部截面与根部截面的相对扭转角。利用以上初始参数及所建立的算法对上述问题进行数值求解, 得到了无扭向叶片 ($\varphi = 0$) 复合转动状态下安装角与振动位移及振型的有关曲线 (如图 1-3)。

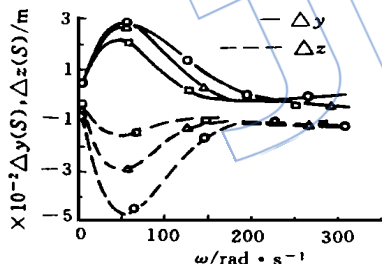


图 1 叶片在两个平面的幅频特性 ($\varphi = 0$)

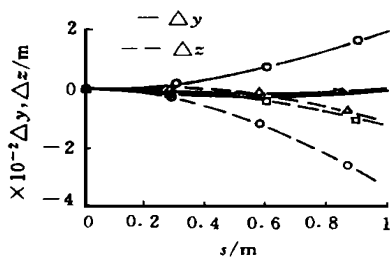


图 2 叶片在两个平面的振型 ($\alpha = 30^\circ$; $\varphi = 0$)

图 1 横轴代表转子工作转速 ω , 纵轴代表沿 O_y 和 O_z 轴叶尖振动的位移 $\Delta y(s)$ 和 $\Delta z(s)$ 。图中给出了 3 个不同安装角 (图中 $\circ$ 为 $\alpha = 30^\circ$; $\triangle$ 为 45° ; $\square$ 为 60°) 所对应的 3 对叶尖位移随转速的变化曲线。由图可见, 不同安装角的叶片在两个平面的振动位移在转速 $\omega \approx 50 \text{ rad/s}$ 附近达到各自相应的峰值, 发生大幅值振动; 并以该转速值为中心, 大体在 $0 < \omega < 180 \text{ rad/s}$ 范围内 (这里暂且称之为低转速), 当转速远离该中心时, 振幅逐渐减小。当转速 $\omega > 150 \text{ rad/s}$ (暂称为高转速) 时不同安装角的叶片在两个平面的振动十分微弱, 幅值甚小, 且均处于同一水平, 此时所有位移随转速的变化十分平坦近乎于水平线。这说明复合转动的无扭曲叶片发生纯弯振动时, 在低转速下陀螺力矩要比离心力矩大得多, 而高转速时, 由于离心力与转速的平方成正比, 因此离心力矩要大于陀螺力矩, 这样叶片便被强大的离心力“限制”在

平衡位置的“近邻”微弱振动。因而可以说，低转速时，安装角对振动的影响是显著的，高转速时则相反。

图 2 是当转速 $\omega = 100, 200, 300 \text{ rad/s}$ (图中分别以 $\circ$ 、 $\triangle$ 、 $\square$ 表示)，安装角 $\alpha = 30^\circ$ 时，叶片复合转动时在旋转平面和轴向平面振动所对应的振型。图 3 给出了安装角对振动位移的影响，由于这时我们只改变安装角，而转子和叶片的其余参数均保持不变，在这个前提下，由力与位移最基本的关系出发，并假定离心力的影响可忽略不计，此时不难得到某个转速下关于叶片位移和安装角的粗略关系：即轴向位移 Δz 按安装角余弦的平方规律变化，而周向位移则是按安装角两倍的正弦规律变化。图 3 中当 $\omega = 100 \text{ rad/s}$ 时 (图中以 $\circ$ 表示) 叶尖位移 ($\Delta y (S)$ 、 $\Delta z (S)$) 随安装角 α 在两个平面的变化曲线正显示了这一点——叶尖

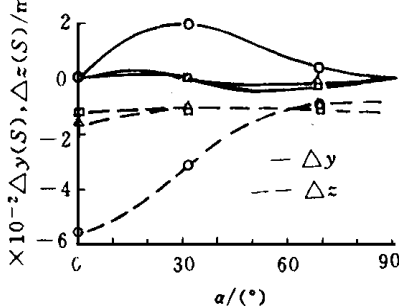


图 3 叶尖在两个平面振动的位移随 α 的变化

在旋转平面的位移近似于 $\sin 2\alpha$ 的规律，在轴向平面近似于 $\cos^2 \alpha$ 规律，其中的偏差是由于只考虑了叶片复合转动时的陀螺力矩，而忽略了离心力矩所致。当 $\omega = 200, 300 \text{ rad/s}$ 时 (图中分别以 $\triangle$ 、 $\square$ 表示)，上述叶尖位移规律消失，因为高转速时离心力影响是不能忽略不计的，而上述规律是在忽略离心力的前提下得到的。高转速时由于离心力的影响，叶尖位移随安装角的变化非常微小。为此我们用本文的方法通过计算更高转速的情况 (ω 在 $400 - 1000 \text{ rad/s}$ 以上) 证明了这一点，也就是说高速时安装角对无扭曲叶片振动的影响很小，甚至可以忽略不计。

综合以上分析，可以得到下列结论，复合转动时不同安装角的无扭曲叶片在低转速时可能伴随着程度不同的大幅值振动，但在高转速的情况下，叶片的振动大为减弱，同时安装角对振动的影响随之大减，甚至可忽略不计。另外当安装角在某个范围 (比如 $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) 增大时，叶片在两个平面的振动在整个转速范围内同时有效地得以削弱。这给了我们两点不很成熟的启示：(1) 低转速时飞机不宜做 (剧烈地) 曲线运动；(2) 叶片设计中，若能选取足够大的安装角，则可有效地遏制机动飞行时叶片所造成的振动；从而可提高叶片的工作寿命。

需强调的是，以上结论仅适合于无扭曲叶片。对于扭曲叶片，其振动情形将大为复杂。

作者对 В. И. Гулев教授对本文的重大指点表示衷心感谢!

参 考 文 献

- 1 徐邦年. 美国空军 92 财年飞行安全简述. 国际航空, 1993, 10: 60-62
- 2 1994 年 9 月歼六 50 号返场着陆时飞机起火事故. 飞行事故和失效分析. 1995, (19)
- 3 飞行事故检查和分析 (航空工程部分). 北京: 中国人民解放军第一研究所, 1977: 558; 飞行事故检查和分析 (续篇). 1987: 374
- 4 Гулев В И, Мирчевский А В. Колебания лопастей роторов при сложном вращении. Машинное, 1989, (5): 81-87
- 5 Попов Е П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М. Физматгиз, 1986: 294
- 6 Гулев В И, Гайдаичук В В, Кашин В Л, и др. Упругое деформирование фланцевого витого стержня. Прикл механика, 1988, 24 (8): 85-91
- 7 Лурье А И. Аналитическая механика. М. Физматгиз, 1961: 824

(责任编辑 王震华)