

弧齿锥齿轮波动共振条件分析*

东 北 大 学 郭星辉** 鄂中凯 陈良玉 王延忠

【摘要】 应用弹性理论和波动理论, 推出旋转盘形弧齿锥齿轮波动响应的模态解, 重点讨论了啮合力 F 对齿轮波动共振的影响。给出了弧齿锥齿轮波动共振的条件。

主题词: 弧齿锥齿轮 波动力学 共振
分类号: O321 V232.8

1 前 言

盘形锥齿轮是航空发动机中的基本元件, 由于工作环境恶劣, 常产生失效故障, 理论和实验的研究都表明: 齿轮是由于在工作中产生行波共振, 造成齿轮成块破裂而失效。目前采取的解决办法是: (1) 改变齿轮的固有频率, 使其避开工作转速内的共振点, 这方法常因工作转速内的共振点多, 而使齿轮不能完全避开波动共振; (2) 改直齿锥齿轮为弧齿锥齿轮, 这在一定程度上改善了齿轮的啮合性能, 减小了振动应力。但是由于发动机高温、高速的工作环境, 安装、加工误差等因素, 此种齿轮仍有故障产生, 本文就弧齿锥齿轮产生波动共振的条件进行讨论。

2 弧齿锥齿轮的波动振动响应

将弧齿锥齿轮简化为外边自由, 内边夹支、厚度为 h 的均匀圆环板, 齿轮模型如图 1 所示。取极坐标系, 有阻尼的圆环板波动方程为^[1]:

$$D \nabla^4 W + C(\partial W / \partial t) + \rho h (\partial^2 W / \partial t^2) = f(t) \quad (1)$$

$$D = Eh^3 / [12(1 - \mu^2)] \quad (2)$$

内、外边缘边界条件分别为

$$r = r_a: \quad W = 0, \quad \partial W / \partial r = 0 \quad (3)$$

$$r = r_b:$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 W + \frac{1-\mu}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{W}{r} &= 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

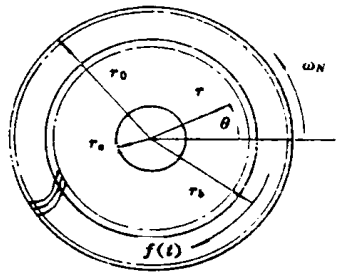


图 1 齿轮模型

特征函数: $W_{mn}(r, \theta) = W_{mn}(r) e^{im\theta} \quad (5)$

其中, m, n 分别为振型的节径数和节圆数。设通解:

$$W_{mn}(r) = A_N J_N(\gamma_{mn} r) + B_N Y_N(\gamma_{mn} r) + C_N I_N(\gamma_{mn} r) + D_N K_N(\gamma_{mn} r) \quad (6)$$

J_N, Y_N 与 I_N, K_N 分别与为 N 阶第一、第二种实宗量和虚宗量的贝塞尔函数。

1993 年 4 月收到; 1993 年 7 月收到修改稿。 * 国家自然科学基金资助项目。

** 沈阳市东北大学机械零件教研室 110006

由式(1)的齐次方程导出固有频率的表达式:

$$\omega_{mn}^2 = \{Eh^2 / [2\rho(1 - \mu^2)]\} \mathcal{Y}_{mn}^4 \quad (7)$$

$\mathcal{Y}_{mn}$ 可由边值用数值解求出,并且:

$$D \nabla^4 W_{mn} = \rho h \omega_{mn}^2 W_{mn} \quad (8)$$

波动振动的正交性条件:

$$\int_{\pi} \int_a^b W_{mn}(r) e^{im\theta} W_{ls} e^{-il\theta} \rho h r dr d\theta = 0 \quad (m \neq l, n \neq s) \quad (9)$$

设圆环板有 Z 个齿,并假定 θ 角与旋转方向一致为正,反之为负。齿间啮合力在固定坐标内是一不动点,在图 1 所示的极坐标系(相对坐标系)中,则以转速相反沿圆盘周边转动,旋转一周,间断 Z 次,啮合周期为:

$$T = 2\pi Z \omega \quad (10)$$

在一对齿啮合过程中,齿间啮合力表示成:

$$f(t) = F \delta(r - r_o) \delta(\theta + \omega t) / r_o \quad (11)$$

由于 F 在周边上连续,将其展成付氏级数:

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_K e^{i(K\pi\pi)t} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_K e^{i(KZ/2)\omega_N t}, \quad C_K = \frac{1}{2T} \int_T F e^{i(K\pi\pi/T)t} dt \quad (12)$$

此时,式(1)成为:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_K e^{i(KZ/2)\omega_N t} \delta(r - r_o) \delta(\theta + \omega t) / r_o \quad (13)$$

激振力 $f(t)$ 在圆环板上产生的波动可沿圆环板周边向两个方向传播,一般习惯称与旋转方向相同者为前行波,反之为后行波。因为方程(1)是线性的,所以波动解的一般形式为^[2,3]:

$$W(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^{\infty} W_{mn}(r) [e^{im\theta} q_{mn}^+(t) + e^{-im\theta}(t) q_{mn}^-(t)] \quad (14)$$

其中, q_{mn}^+ 、 q_{mn}^- 为待定的沿两个方向传播的广义模态坐标, $W_{mn}(r)$ 为实径向函数。

把式(14)和式(13)代入(1),注意到式(8)、(9)有:

$$\frac{d^2 q_{mn}^{\pm}(t)}{dt^2} + \frac{C}{\rho h} \frac{dq_{mn}^{\pm}(t)}{dt} + \omega_{mn}^2 q_{mn}^{\pm}(t) = \frac{W_{mn}(r_o)}{\rho h N_{mn}} \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_K e^{i(KZ/2 \pm m)\omega_N t} \quad (15)$$

$$N_{mn} = 2\pi r_o \int_a^b W_{mn}^2(r) dr \quad (16)$$

$$\text{令:} \quad C / \rho h = 2\eta_{mn} \omega_{nn}, \quad q_{mn}^{\pm}(t) = e^{i(KZ/2 \pm m)\omega_N t} \omega_N t \quad (17)$$

η_{mn} 称为波动模态阻尼比,将式(17)代入式(15),解出广义模态坐标:

$$q_{mn}^{\pm}(t) = \frac{W_{mn}(r_o)}{\rho h N_{mn}} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{C_K \cdot e^{i(KZ/2 \pm m)\omega_N t}}{\omega_{mn}^2 + 2\eta_{mn} \omega_{nn} [(KZ/2) \pm m] \omega_N i - [(KZ/2) \pm m]^2 \omega_N^2} \quad (18)$$

解为:

$$W(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{W_{mn}(r) W_{mn}(r_o)}{\rho h N_{mn}} \times \left[\sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{C_K \cdot e^{i(KZ/2 + m)\omega_N t} \cdot e^{im\theta}}{\omega_{nn}^2 + 2\eta_{nn} \omega_{nn} [(KZ/2) + m] \omega_N i - [(KZ/2) + m]^2 \omega_N^2} + \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{C_K \cdot e^{i(KZ/2 - m)\omega_N t} \cdot e^{-im\theta}}{\omega_{nn}^2 + 2\eta_{nn} \omega_{nn} [(KZ/2) - m] \omega_N i - [(KZ/2) - m]^2 \omega_N^2} \right] \quad (19)$$

为简洁起见, 定义振幅 A_f^{km} 、 A_b^{km} 和相位角 α_f^{km} 、 α_b^{km} 分别为如下形式:

$$A_f^{km}, A_b^{km} = 1 / \{ \omega_{mn}^2 - [(KZ/2) \pm m]^2 \omega_n^2 \} + \{ 2\eta_{mn}\omega_{mn} [(KZ/2) \pm m]\omega_n \}^2 \quad (20)$$

$$\alpha_f^{km}, \alpha_b^{km} = \text{tg}^{-1} \frac{2\eta_{mn}\omega_{mn} [(KZ/2) \pm m]\omega_n}{\omega_{mn}^2 - [(KZ/2) \pm m]^2 \omega_n^2} \quad (21)$$

当 F 是一变量时用 $G(t)$ 表示, 此时 C_K 成为:

$$C_K = \frac{G(\xi)}{2T} \int_T^{\infty} e^{-i(KZ/2)t} dt \quad (22)$$

容易证明无论 F 为常量或变量时均满足

$$C_K = C_{-K} \quad (23)$$

将式(20)、(21)和式(23)代入式(19), 则:

$$\begin{aligned} W(r, \theta, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W_{mn}(r) W_{mn}(r_o)}{\rho h N_{mn}} \{ 2C_o A_f^{om} \cos(m\omega_n t + m\theta - \alpha_f^{om}) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} 2C_K A_f^{km} \cos\left[\left(\frac{KZ}{2} + m\right)\omega_n t + m\theta - \alpha_f^{km}\right] \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} 2C_K A_b^{km} \cos\left[\left(\frac{KZ}{2} - m\right)\omega_n t + m\theta - \alpha_b^{km}\right] \} \quad (24) \end{aligned}$$

式(24)即弧齿锥齿轮在盘面相对坐标系中的波动振动解的模式表达式, 当齿轮旋转时, 在动坐标系中式(24)仍成立, 不同的是此时 $\omega_{mn}(N)$ 、 $\eta_{mn}(N)$ 都是转速的函数。

3 计算中几个值得注意的问题

显然当 A_{omf} 、 A_f^{km} 、 A_b^{km} 存在极值时, 式(24)会产生共振, 由式(20)当

$$\omega_{mn} = [(KZ/2) \pm m]\omega_n \quad (K = 0, 1, 2, \dots, \infty) \quad (25)$$

时 A_{omf} 、 A_f^{km} 、 A_b^{km} 分别有最大值, 因 $K=0$ 时的 ω_n 已远超出齿轮的工作转速, 故此种称为驻波共振的情况不会发生。与通常的振动不同, 当 $\omega_{mn}^2 - [(KZ/2) + m]^2 \omega_n^2 = 0$ 时, A_f^{km} 有极值, 此时参加振动的节径数 m 较小(一般为 $2 \sim 4$), 故 A_b^{km} 并不趋于零, 而是与 A_f^{km} 有同样数量级, 所以产生波动共振时, 式(24)表示了一个拍振曲线, 产生波动共振的条件除与 ω_{mn} 有关外, 显然也与 C_K 有关, 即与啮合力函数 F 有关(F 由齿轮啮合的重合度 ϵ 确定)。下面我们着重讨论啮合力函数 F 对齿轮波动共振的影响。

从啮合原理可知, 当 ϵ 为理论设计的重合度时, 叠加后的齿轮啮合力函数 F 为一直线, 如图 2(a) 所示有

$$C_o = \frac{1}{2T} \int_T^{\infty} F dt, \quad C_K = 0 \quad (26)$$

式(24)成为

$$W(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W_{mn}(r) W_{mn}(r_o)}{\rho h N_{mn}} 2C_o A_f^{om} (m\omega_n t + m\theta - \alpha_f^{om}) \quad (27)$$

共振条件为 A_f^{om} 有极值, 即 $\omega_{mn} = m\omega_n$, 由于 ω_n 远小于 ω_{mn}/m , 因此只会产生频率为 $m\omega_n$ 的强迫振动响应。

当 ϵ 小于理论设计的重合度时, 叠加的啮合力函数 F 理论上如图 2b 所示, 形如矩齿波, 这种情况下:

$$C_o = \frac{1}{2T} \int_T^{\infty} F dt, \quad C_K = \frac{1}{2T} \int_T^{\infty} F e^{-i(KZ/2)t} dt \quad (28)$$

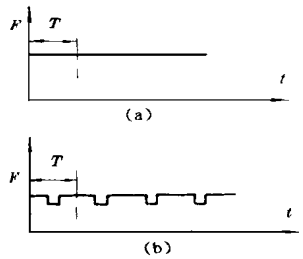


图 2 啮合力函数

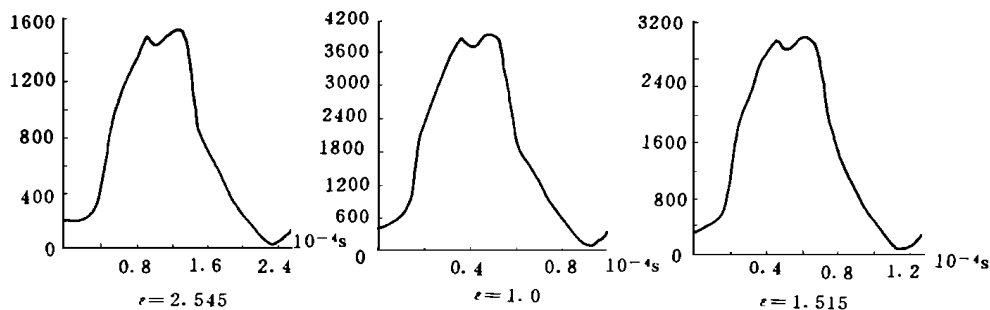


图 3 齿轮的啮合力函数

显然 $C_K \neq 0$, 此时齿轮的波动振动为式(24), 齿轮上某一点的共振曲线为拍。现以某型机的弧齿锥齿轮为例, 分析齿轮在不同的重合度下的共振响应。该齿轮为格列森弧齿锥齿轮, SGM 法加工, 刀盘半径 $r = 76.2\text{mm}$, 模数 $m = 3.875\text{mm}$, 齿数 $Z = 35$, 分锥角 $\beta = 36^\circ 40' 28''$, 中点螺旋角 $\beta = 35^\circ$; 齿轮的三节径固有频率为 $\omega_0 = 7356.1 \times 2\pi^{[4]}$, 在 $K = 2$ 时产生的共振转速为 11614.7r/min , 我们计算了齿轮在图 3 所示的不同重合度下在该共振转速的共振响应, 响应曲线如图 4 所示, 结论是明显的: 在共振转速下产生波动共振的条件是 ϵ 小于理论值。

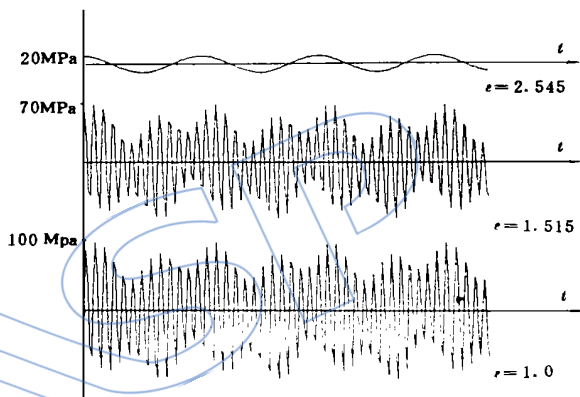


图 4 不同重合度下的响应曲线

4 结 论

弧齿锥齿轮的波动共振不仅与齿轮的固有频率有关, 也与齿轮工作中的啮合力 F 有关, 当 ϵ 等于理论值时, 齿轮不会产生波动共振, 当 ϵ 小于理论值时, 并且工作转速满足式(25), 则齿轮一定会产生波动共振, 振幅与 ϵ 有关, 即 ϵ 越小, 幅值越高。

文中讨论的齿轮多在飞机发动机、汽轮机的高速运行的机器中工作, 由于安装、制造误差、离心变形等因素的影响, 齿轮的啮合重合度 ϵ 远小于理论值, 所以尽管弧齿锥齿轮改善了啮合力, 减小了振动应力, 但在某种情况下仍能引起齿轮的波动共振, 也产生过故障, 故应研究降低这种齿轮振动应力的方法。

参 考 文 献

- 1 徐芝伦. 弹性理论. 北京: 人民教育出版社, 1970
- 2 Morse P M, Ingard K U. 理论声学. 杨训仁等译, 北京: 科学出版社, 1984
- 3 郭星辉. 叶片盘的旋转失速振动响应分析. 航空学报, 1992, 13(5): 333-338
- 4 鄂中凯, 郭星辉, 陈良玉等. 弧齿锥齿轮的动态特性分析. 东北工学院学报, 1993, 14(5): 460-463

(责任编辑 王震华)