

复约束方法计算斜齿圆柱 齿轮结构特征值问题*

西 北 工 业 大 学 赵 宁** 刘 更 方宗德 杨小辉

【摘要】 根据齿轮结构的循环对称性, 以仅含有一个完整轮齿的扇形子结构作为齿轮有限元计算模型, 用计算循环对称结构特征值问题的复约束方法, 通过求解一个扇形子结构的特征值问题得到整个齿轮结构的特征值和特征向量。计算了 4 个不同参数齿轮的低阶固有频率和振型, 并与实验结构数据比较, 获得了满意的结果。这证明复约束法既极大地减少了计算所需内存和机时, 又可建立包含轮齿和轮体在内的计算模型, 保证了齿轮结构特征值问题计算的完整性和准确性。

主题词: 齿轮 特征值问题 有限元法
分类号: O342

1 前 言

为确保齿轮传动安全可靠地工作, 必须深入研究齿轮的动态特性, 建立准确而迅速的理论预测和设计方法。在进行结构动力学分析时, 如果建立完整结构的有限元计算模型, 为了保证计算精度会使模型很大而占用大量计算内存和时间, 甚至无法运行。为此, 目前通常对模型进行一些简化, 在动态特性计算中常将齿轮的轮齿削掉, 取其分度圆为外圆, 这就使计算模型与实际结构之间存在一定距离。Thomas^[1]、Ramamurti^[2]、Balasubramanian^[3]等对循环对称结构作了许多研究, 提出充分利用外存的各种算法, 简化了这类结构固有振动特性的计算。Ramamurti 还根据结构的循环对称性, 通过建立一个齿的子结构模型研究了直齿轮的静、动应力^[4]。这些研究均未涉及到实际结构的动态问题。本文利用结构的循环对称特性, 将计算循环对称结构特征值问题的复约束方法用于齿轮。以仅含有一个完整轮齿的扇形子结构为计算模型, 引入复特征向量和复约束^[1]使齿轮结构的特征值方程解耦, 由一个子结构计算出整个齿轮结构的特征对。计算了 4 个斜齿圆柱齿轮的低阶固有频率和振型, 并与实验值进行了比较, 获得了满意的结果。这证明复约束方法不仅能极大减少结构动力分析所需计算内存和时间, 而且可保证齿轮结构特征值问题计算的完整性和精确性。

2 齿轮结构特征值问题复约束方法计算模型

结构的整体座标系如图 1 所示。设齿轮有 N 个齿, 按齿数将齿轮划分成 N 个相同的扇区, 记相邻两扇区的界面为 S_j ($j = 1, 2, \dots, N$), 称包含界面 S_j 但不包含界面 S_{j+1} 的扇区为基本扇形子结构, 称既包含界面 S_j 又包含界面 S_{j+1} 的扇区为扩充扇形子结构。本文仅取一

1995 年 4 月收到; 1995 年 9 月收到修改稿。 * 本文系航空基金资助项目
** 西安西北工业大学 324 信箱 710072

个扩充扇形子结构作为有限元计算模型,不失一般性,以扩充扇形子结构 1 为例。首先对 S_1 界面结点编号,最后对 S_2 界面结点编号,两界面结点编号顺序相同。两界面上各结点的位移由界面结点循环对称条件决定。考虑到齿轮的结构特点、装配和工作性质,将其内圈固定。

3 扇形子结构复约束广义特征值方程的建立及求解

设各扇形子结构作相同的有限元网格划分,每个基本扇形子结构的结点数为 m 、自由度为 $3m$,则齿轮结构的总自由度为 $3mN$ 。齿轮结构的特征值方程为

$$KZ = \lambda MZ \quad (1)$$

其中: K 和 M 分别为结构的实对称刚度阵和质量阵, λ

为结构的特征值。 $Z = \{Z^{(1)} Z^{(2)} \cdots Z^{(N)}\}$ 为结构的复特征向量,其实部和虚部分别是结构的一对正交的正则化实特征向量,它们具有相同的特征值, $Z^{(j)}$ 为第 j 个扇形子结构对应的复特征向量。作用在任意一个子结构上的复特征向量都可以用扇形子结构 1 的复特征向量表示为

$$Z^{(j)} = Z^{(1)} e^{i(j-1)\mu} \quad (j = 2, 3, \cdots, N) \quad (2)$$

此即复约束条件。式中 μ 是相邻子结构复特征向量之间的相位角,按下式取值

$$\mu = 2\pi(I-1)/N \quad (3)$$

其中 I 是整数。当 N 为偶数时, $I = -(N/2-1), \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, (N/2+1)$; 当 N 为奇数时, $I = -(N-1)/2, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, (N+1)/2$ 。

由于齿轮结构的循环对称性,将式 (2) 代入式 (1) 后,式 (1) 就被解耦,即各个扇形子结构之间的耦合关系被解除。解耦后,扇形子结构 1 的特征值方程可记为

$$K_p Z^{(1)} = \lambda M_p Z^{(1)} \quad (4)$$

此即扇形子结构 1 的复约束广义特征值方程, K_p 和 M_p 分别为子结构的复约束刚度阵和复约束质量阵。上式仅包含子结构 1 的 $3m$ 个自由度,与其它子结构的任何自由度都无关。由式 (4) 可解出给定 μ 值所对应的 $3m$ 个特征值,而 μ 有 N 个独立数值,故有 $3mN$ 个特征值可以被解出,这与整个结构的自由度数目相同,也等于完整齿轮结构的特征值方程的特征值数目。因此,可以从一个扇形子结构的 N 次分析中获得完整齿轮结构的所有特征对。

根据齿轮结构的循环对称性,扩充扇形子结构 1 在界面 S_1 上的任意结点 i 的位移 z_i 与界面 S_2 上对应的结点 j 的位移 z_j 之间应满足如下的循环对称条件:

$$z_j = T_o z_i = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} z_i \quad (5)$$

式中 T_o 为结点循环对称变换矩阵, φ 为每个轮齿所对应的圆心角, $\varphi = 2\pi/N$ 。

扩充扇形子结构 1 的一般有限元特征值方程为:

$$K_1 Z_1 = \lambda M_1 Z_1 \quad (6)$$

其中: $Z_1 = \{z_1 z_2 \cdots z_p\}$, K_1 和 M_1 分别为扩充扇形子结构 1 的 $3p \times 3p$ 阶实对称刚度阵和质

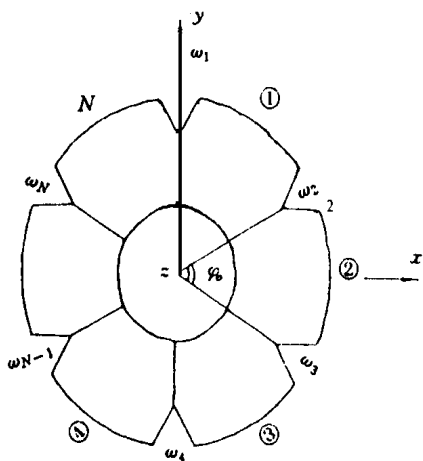


图 1 齿轮的循环对称扇形子结构

量阵, p 为扩充扇形子结构的结点数。设 j 为界面 S_2 上的结点。将界面 S_2 上所有结点的循环对称条件全部引入式 (6), 即将式 (6) 第 j 列子刚阵和子质量阵右乘 T_0 ; 同时对式 (6) 第 j 行的子刚阵和子质量阵左乘 T_0^T , 以保持刚度阵和质量阵的对称性; $j = m+1, m+2, \dots, p$ 。

根据齿轮结构的循环对称性和有限元法知识, 建立基本扇形子结构 1 的复约束特征值方程 (4) 时, 不必组装整个齿轮结构的总刚阵和总质量阵, 只需建立扩充扇形子结构 1 的有限元模型, 引入界面结点的循环对称条件, 组装扩充扇形子结构 1 的刚度阵和质量阵, 按下式建立基本扇形子结构的复约束刚度阵和复约束质量阵

$$K_p = K_{11}^{(1)} + K_{22}^{(1)} + K_{12}e^{i\mu} + K_{12}^T e^{-i\mu}, \quad M_p = M_{11}^{(1)} + M_{22}^{(1)} + M_{12}e^{i\mu} + M_{12}^T e^{-i\mu} \quad (7)$$

式 (7) 中各刚度子阵为

$$K_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mm} \end{bmatrix}_{3m \times 3m}, \quad K_{12}^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{1,m+1} & k_{1,m+2} & \cdots & k_{1,p} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{2,m+1} & k_{2,m+2} & \cdots & k_{2,p} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{m,m+1} & k_{m,m+2} & \cdots & k_{m,p} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{3m \times 3m}$$

$$K_{22}^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{m+1,m+1} & k_{m+1,m+2} & \cdots & k_{m+1,p} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{m+2,m+1} & k_{m+2,m+2} & \cdots & k_{m+2,p} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{p,m+1} & k_{p,m+2} & \cdots & k_{p,p} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{3m \times 3m}$$

其中 k_{ij} 为引入循环对称条件后式 (6) 中第 i 行第 j 列的结点子刚阵。同理, 各质量子阵 $M_{11}^{(1)}$ 、 $M_{22}^{(1)}$ 、 M_{12} 也有上述类似表达式。

将式 (7) 代入式 (4), 齿轮的基本扇形子结构复约束广义特征值方程即被建立。由式 (7) 可见, 复约束刚度阵和复约束质量阵的实部对称、虚部反对称, 因此式 (4) 是复 Hermite 阵的广义特征值问题, 其特征值是实数而特征向量是复数。可先对复约束质量阵进行复 Hermite 阵 Cholesky 分解, 然后将式 (4) 转化为复 Hermite 阵标准特征值问题求解。由于转化后所得矩阵仍为复 Hermite 阵, 故可利用其性质简化求解过程, 提高运算速度。

对于给定的 μ 值, 由式 (4) 按上述方法求出相应的特征值和子结构 1 对应的特征向量; 再由复约束条件式 (2) 求出各个子结构在给定 μ 值下相应的特征向量, 整个结构在给定 μ 值下的特征值和特征向量便已获得。对于式 (3) 给定的一系列 μ 值重复上述过程, 则完整齿轮结构的所有特征值和特征向量便可获得。

4 斜齿圆柱齿轮特征值问题的计算

齿轮参数为: 齿数 $Z=96$, 法面模数 $m=2$ mm, 齿宽 $B=15.4$ mm, 螺旋角 $\beta=16.26^\circ$; 变位系数 $x=0$ 。用 R 表示轮缘厚度、 W 表示轮幅厚度, 4 个齿轮结构参数为: (1) $R=m$ (mm), $W=B/5$ (mm); (2) $R=3m$ (mm), $W=B/5$ (mm); (3) $R=m$ (mm), $W=B/3$ (mm); (4) $R=3m$ (mm), $W=B/3$ (mm)。

以仅包含一个完整轮齿的扇区为扩充扇形子结构有限元计算模型, 兼顾计算精度和机器内存限制, 网格划分为轴向 3 层、周向 3 层、径向 16 层 (其中轮齿部分 5 层)。扩充扇形子

结构共 144 个结点、60 个单元。基本扇形子结构共有 111 个结点，其内圈（轴孔）结点 3 个方向上的自由度均固定。按计算模型推算，整个齿轮结构共有 10656 个网格结点、5760 个单元。如果以整个齿轮作为计算模型，用以往的方法进行计算，对于一般的计算机内存不可想象。

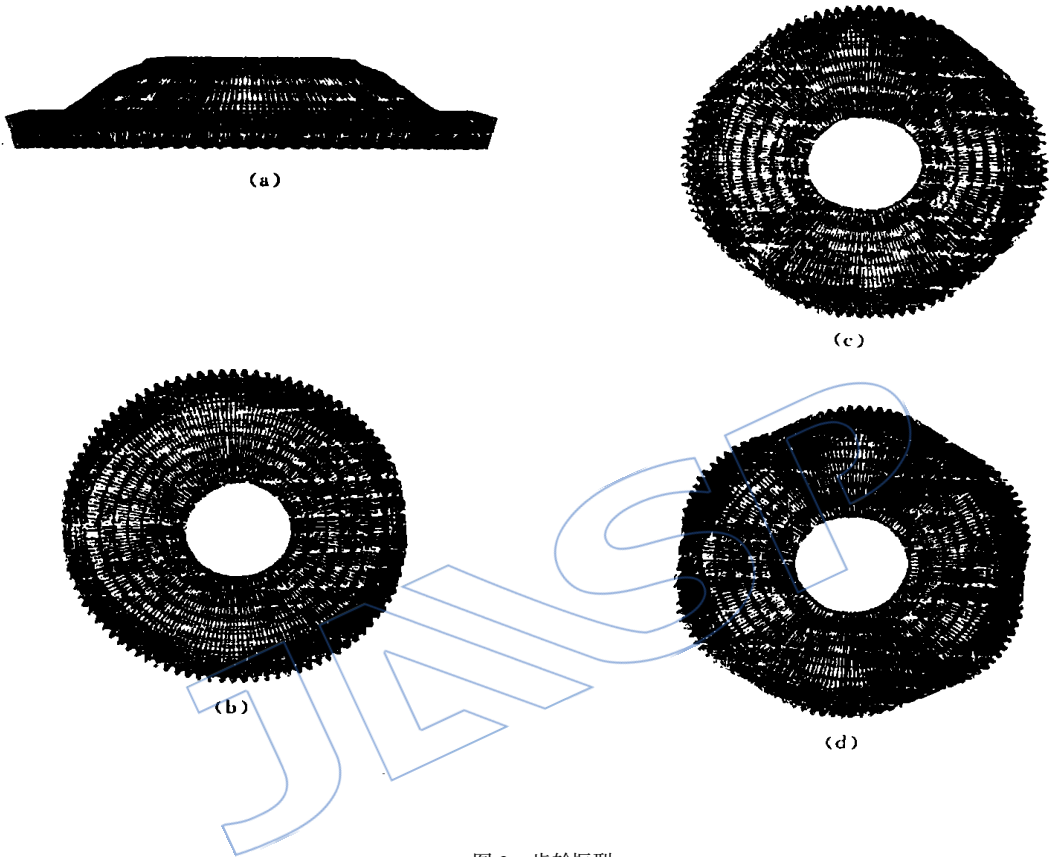


图 2 齿轮振型

用复约束法计算了上述齿轮的低阶固有频率，表 1 给出了计算值以及实验值。

表 1 固有频率（单位：Hz）

齿轮编号	(1)		(2)		(3)	(4)
模态号	计算值	实验值	计算值	实验值	计算值	计算值
1	436.5	452.1	475.6	487.5	852.2	799.8
2	543.9	522.8	541.7	612.5	963.9	966.3
3	703.9	637.6	846.4	862.5	1227.8	1254.4
4	1897.8		2493.5	2225	2136.5	2628.2
5			4130.2	4188		
6			4686.8	4650		

由表 1 可见，本文计算结果与实验结果基本吻合。在辐板厚度相同时，固有频率随轮缘

厚度增加而加大; 在轮缘厚度相同时, 固有频率随辐板厚度增加而加大。

图 2 为 2 号齿轮的前 4 阶振型图。尽管齿轮网格很密, 仍可清楚地看出 (a) 为伞形振动, (b) 为一节径振动, (c) 为二节径振动, (d) 为三节径振动。

5 结 论

(1) 根据齿轮结构的循环对称性, 将计算循环对称结构特征值问题的复约束方法用于齿轮结构。以含有完整轮齿的扇形结构为计算模型, 利用有限元方法, 通过求解一个扇形子结构的特征值问题得到整个齿轮结构的特征对。这解决了计算精度与计算模型所需内存之间的矛盾, 极大地减少了求解齿轮结构特征值问题所需的计算内存和计算时间。

(2) 用复约束方法计算了 4 个薄幅斜齿圆柱齿轮的低阶固有频率和振型, 计算与实验结果进行了比较, 并绘制了振型图, 获得了满意的结果。这证明本文方法可以建立包含轮齿、轮体在内的有限元计算模型, 保证了齿轮结构特征值问题计算的完整性和精确性。

参 考 文 献

- 1 Thomas D L. Dynamics of Rotationally Periodic Structures. Int. J. Num. Meth. Engrg., 1979, 14: 81- 102
- 2 Ramamurti V, Balasubramanian P. Static Analysis of Circumferentially Periodic Structures with Potter's Scheme. Comp. Stru., 1986, 22: 427- 431
- 3 Balasubramanian P, Ramamurti V. Free Vibration Analysis of Symmetric Structures. Comm. in Appl. Num. Meth., 1991, 7: 131- 139
- 4 Ramamurti V, Rao M A. Dynamic Analysis of Spur Gear Teeth. Comp. Stru., 1992, 7 (4): 348- 350

(责任编辑 魏星禄)