

轴向预紧端齿连接转子的动力特性分析

株洲航空动力机械研究所 尹泽勇** 欧园霞 李彦梅 庆

【摘要】建立了用有限元结构模态综合法进行轴向预紧端齿连接转子动力特性分析的公式系统。重点阐述如何考虑端齿及变轴力的影响,如何获得变轴力端齿梁元的性质矩阵和建立变轴力端齿梁元及系统的运动方程。

主题词: 轴向应力 轴向应变 转子 动力特性 模态综合法

在进行转子动力特性分析时,传统的分析方法与实际不符,将导致一定的分析误差。本文针对变轴力端齿连接转子这样一类模型建立了转子系统有限元公式系统。对此类结构进行分析时,对一般转子结构采用普通梁元素,而对于端齿连接部位采用所谓“端齿梁元”。首先在普通梁元及端齿梁元的运动方程中引入轴力随转速变化的变轴力刚度,然后利用有限元结构模态综合法进行动力特性求解。利用本文所建立的方法,编制了动力特性分析程序,利用它可对变轴力端齿连接转子—支承—机匣系统进行动力特性分析。

1 端齿影响及变轴力端齿梁元性质矩阵

建立固定、旋转及横截面3种坐标系,在固定和旋转坐标系内分别建立拉格朗日运动方程及轴承支配方程。利用正交旋转矩阵来实现坐标变换。对于普通梁元,有关式子如下^[1]

$$\begin{Bmatrix} V(s,t) \\ W(s,t) \end{Bmatrix} = [\Psi(s)] \{q^e(t)\}, \quad \begin{Bmatrix} B(s,t) \\ \Gamma(s,t) \end{Bmatrix} = [\Phi(s)] \{q^e(t)\} \quad (1)$$

$$[\Psi(s)] = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 \\ 0 & \psi_1 & -\psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & -\psi_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$[\Phi(s)] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi & \varphi & 0 & 0 & -\varphi & \varphi & 0 \\ \varphi & 0 & 0 & \varphi & \varphi & 0 & 0 & \varphi \end{bmatrix} \quad (3)$$

同普通梁元一样,对于变轴力端齿梁元可写出元素拉格朗日方程:

$$d(\partial T / \partial \dot{q}) / dt - \partial(T - P_A - P_B) / \partial q = Q \quad (4)$$

式中: T 为元素动能, P_B 为元素弹性弯曲变形能, P_A 为元素轴力位能, Q 为非保守广义力。

以往采用普通整体梁元的一般有限元动力分析工作中,常常忽略式(4)中轴力位能项 P_A , 而对于弹性弯曲变形能 P_B 这一项,则通过 EI 及 $E^2 I^2 / GA_s$ 与相应位移分量的二阶及三阶导数平方的乘积之和来表示。 E 为弹性模量, I 为截面惯性矩, G 为剪切模量, A_s 为有效抗剪面积。

对于变轴力端齿梁元,不再略去轴力位能 P_A , 其大小可用变轴力在轴向位移上所作功的

负值表示。为简单起见, P_A 中的位移仍用式(1)、(2)的形式, 动能项 T 中出现的位移表达式也仍采用(1)~(3)的形式, 不考虑端齿存在的影响。要考虑的只是端齿存在对于弹性弯曲变形能的影响。仍通过某种反映其抗弯性的参数 J_{be} 及反映其抗剪性的参数 J_{sh} 与相应位移分量二阶及三阶导数平方的和这种形式来表示端齿梁元的 P_B 项, 不过由于端齿的存在, P_B 项中出现的位移表达式不能再采用式(1)、(2)的形式。为此, 假设 P_B 中所用 V 及 W 有如下形式:

$$\begin{Bmatrix} V(s, t) \\ W(s, t) \end{Bmatrix} = [\Psi] \{q^e(t)\} \quad (5)$$

$[\Psi]$ 只是一种形式上的位移插值函数矩阵, 由于端齿存在无法写出其具体表达形式。可把变轴力端齿梁元看成一承受轴力的普通整体梁元, 只是其弹性弯曲变形能中出现的位移用式(5)形式。据上述假设, 可写出变轴力端齿梁元位于 (s) 处的微小轴段的有关能量表达式

$$\begin{cases} dP_B^e = J_{be}(\dot{V}^2 + \dot{W}^2)ds/2 + J_{sh}(\dot{V}^{m2} + \dot{W}^{m2})ds/2 \\ dP_A^e = -H(\Omega)(V^2 + W^2)ds/2 \\ dT^e = \rho(\dot{V}^2 + \dot{W}^2)ds/2 + \Phi J_{\rho} \dot{\Phi} ds/2 + J_b(\dot{B}^2 + \dot{\Gamma}^2)ds/2 - BJ_{\rho} \dot{\Phi} ds \end{cases} \quad (6)$$

$H(\Omega)$ 为随转速变化的轴向力, 以拉力为正, 压力为负; ρ 为单位长度质量; J_D 、 J_{ρ} 为直径转动惯量及极转动惯量; Φ 为转角, 对于等速系统 $\dot{\Phi} = \Omega$, Ω 为转子自转速度。“ $'$ ”表示对位置求导, “ $\dot{}$ ”表示对时间求导。沿元素全长对式(6)积分, 得矩阵形式的元素能量

$$\begin{aligned} U^e &= P_B^e + P_A^e + T^e \\ &= (1/2)\{q^e(t)\}^T([K_B^e] - [K_A^e])\{q^e(t)\} + (1/2)J_{\rho}l\Omega^2 \\ &\quad + (1/2)\{\dot{q}^e(t)\}^T([M_T^e] + [M_R^e])\{\dot{q}^e(t)\} - \Omega\{\dot{q}^e(t)\}^T[N^e]\{q^e(t)\} \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $[K_B^e]$ 、 $[K_A^e]$ 、 $[M_T^e]$ 、 $[M_R^e]$ 分别为元素弯曲刚度矩阵、轴力矩阵及质量矩阵, $[N^e]$ 则是陀螺矩阵 $[G^e]$ 的构成成份 ($[G^e] = [N^e] - [N^e]^T$), 它们的表达式如下:

$$\begin{cases} [K_B^e] = \int_{be} [\Psi]''^T [\Psi]'' ds + \int_{sh} [\Psi]'''^T [\Psi]''' ds \\ [K_A^e] = \int H(\Omega) [\Psi]^T [\Psi] ds, \quad [M_T^e] = \int [\Psi]^T [\Psi] ds \\ [M_R^e] = \int J_b [\Phi]^T [\Phi] ds, \quad [N^e] = \int J_{\rho} [\Phi]^T [\Phi] ds \end{cases} \quad (8)$$

式(8) $[K_A^e]$ 中的轴力 $H(\Omega)$ 是随转速而变化的, 文献[2]中建立了确定 $H(\Omega)$ 的方法, 其表达式

$$H_{\Omega} = H_0 + (\bar{H}_{\Omega}/\Omega^2)\Omega^2 = H_0 + \alpha\Omega^2 \quad (9)$$

H_{Ω} 是在给定转速 Ω 下算出的无装配预紧力时拉杆或鼓筒中的轴向力, H_0 是任一转速下包含初始装配预紧力在内的转子拉杆或鼓筒中的轴向力, H_0 为转子装配时拉杆或鼓筒的初始轴向力。 $\alpha = \bar{H}_{\Omega}/\Omega^2$ 称为影响系数, 可按文献[2]中建立的方法直接算出。 $[K_A^e]$ 的具体表达式为:

$$[K_A^e] = \frac{H_0 + \alpha\Omega^2}{30l(1 + \Phi)^2} \begin{bmatrix} A & & & & & & & \\ 0 & A & & & & & & \\ 0 & -3l & B & & & & & \\ 3l & 0 & 0 & B & & & & \\ -A & 0 & 0 & -3l & A & & & \\ 0 & -A & 3l & 0 & 0 & A & & \\ 0 & -3l & C & 0 & 0 & 3l & B & \\ 3l & 0 & 0 & C & -3l & 0 & 0 & B \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中: $A = 36 + 60\Phi + 30\Phi^2$, $B = 4l^2 + 5l^2\Phi + 2.5l^2\Phi^2$, $C = -(l^2 + 5l^2\Phi + 2.5l^2\Phi^2)$ 。根据第3节的基本假设可知, 上式对于变轴力普通整体梁元也同样适用。

由于端齿的存在, 式(8) $[K_B^e]$ 中的 J_{be} 、 J_{sh} 、 $[\Psi]''$ 、 $[\Psi]'''$ 等的具体表达形式无法直接写出, 因

此不能导出普通整体梁元那样的刚阵显式。为此,可采用固体接触问题的三维有限元分析来处理一段含端齿轴段,在一定简化假设下,按照刚度系数的定义由有限元分析结果导出该端齿轴段的等截面梁元形式的刚度矩阵—称为端齿梁元刚阵,具体方法见文献[3]。所获得的端齿梁元刚阵总是具有如下形式:

$$[K_B^e] = \begin{bmatrix} K_1 & & & & & & & \\ 0 & K_1 & & & & & & \\ 0 & -K_4 & K_2 & & & & & \\ K_4 & 0 & 0 & K_2 & & & & \\ -K_1 & 0 & 0 & -K_4 & K_1 & & & \\ 0 & -K_1 & K_4 & 0 & 0 & K_1 & & \\ 0 & -K_4 & K_3 & 0 & 0 & K_4 & K_2 & \\ K_4 & 0 & 0 & K_3 & -K_4 & 0 & 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

当采用文献[3]中的单系数法来求得以上 $[K_B^e]$ 时,所得 $[K_B^e]$ 各项与整体梁元刚阵解析解对应各项均成同一比例。此时可认为端齿梁元刚阵由整体梁元刚阵通过折减弹性模量(E 、 G)而得到。若折减系数为1,端齿梁元刚阵即还原为普通整体梁元刚阵。但在采用文献[3]中的双系数法来获得 $[K_B^e]$ 的情况下,端齿梁元刚阵与普通整体梁元刚阵则无以上简单比例关系。

2 变轴力端齿梁元的运动方程、系统运动方程

将式(7)代入(4)中,并利用二次型微商公式,得变轴力端齿元素相对于固定坐标系的运动方程

$$([M_T^e] + [M_R^e])\{\ddot{q}^e(t)\} - \Omega[G^e]\{\dot{q}^e(t)\} + ([K_B^e] - [K_A^e(\Omega)])\{q^e(t)\} = \{Q^e\} \quad (12)$$

式中 $\{Q^e\}$ 为元素非保守广义力向量,它可包括相邻元素间的节点力向量,元素激振力向量。

利用正交旋转矩阵实现坐标变换,可得元素相对于旋转坐标系运动方程:

$$([M_T^e]) + ([M_R^e])\{\ddot{p}^e(t)\} + \omega[2[M_T^e] + (1 - \nu)[G^e]]\{\dot{p}^e(t)\} + ([K_B^e] - [K_A^e]) - \omega^2([M_T^e] + (1 - 2\nu)[M_R^e])\{p^e(t)\} = \{Z^e\} \quad (13)$$

式中 $\{p^e(t)\}$ 为元素相对于旋转坐标系的位移矢量,且有 $\{q^e\} = [R]\{p^e\}$, $\{Z^e\}$ 为元素非保守广义力向量, ω 为进动角速度,进动状态系数 $\nu = \Omega/\omega$, $[M_T^e]$ 则为变换矩阵 $[M_T^e] = [R]^T[M_T^e][R]$, $[S]$ 为正交旋转矩阵, $[S] = (1/\omega)[R]$ 。

转子系统由连续的具有分布质量的弹性轴、离散的具有回转质量惯性的刚性盘及离散具有弹性、阻尼的轴承所组成。在建立变轴力端齿梁元的运动方程后,利用盘、轴承及普通整体梁元的运动方程^[1],即可将各元素方程进行组装得到转子系统相对于固定坐标系的运动方程:

$$[M^s]\{\ddot{q}^s\} + ([C^s] - \Omega[G^s])\{\dot{q}^s\} + [K^s]\{q^s\} = \{Q^s\} \quad (14)$$

$[C^s]$ 为阻尼阵, $\{Q^s\}$ 为激振力向量,元素间相互作用节点力已抵消。

系统相对于旋转坐标系的运动方程为:

$$[M^s]\{\ddot{p}^s\} + \omega[2[M^s] - \Omega[G^s]]\{\dot{p}^s\} + ([K^s] - \omega^2([M^s] + \Omega[G^s]))\{p^s(t)\} = \{Z^s\} \quad (15)$$

$[M^s]$ 、 $[G^s]$ 分别为系统的质量及陀螺变换阵 $[M^s] = [R]^T[M^s][S]$ 、 $[G^s] = [R]^T[G^s][S]$ 。

3 转子—支承—机匣系统动力特性分析、DARC程序简介

转子—支承—机匣系统由转子及机匣两大类子结构组成。承受变轴力的端齿连接转子这类子结构的有限元分析方法已在前面阐述;对于机匣子结构,本文采用既能保障计算精度又能

大量节省机时内存的承受非轴对称载荷的截锥壳元素进行分析。用有限元素法对各个子结构进行分析后,引入各子结构界面对接条件,采用固定界面模态综合法对全系统整体综合求解。本文采用复模态综合法解非轴对称系统时,利用了左、右特征向量双重正交性进行解耦;采用状态空间广义模态综合法解轴对称系统时,利用对称性把物理坐标下的子结构运动方程变换为复广义坐标下的运动方程,从而可以在复广义坐标下实施实模态综合,使自由度降低一半,大大节省了机时内存。

按以上所建方法开发了变轴力端齿连接转子—支承—机匣系统的动力特性分析程序 *DARC*。该程序可分析该类转子系统进动频率、临界转速、不平衡响应、瞬态响应及稳定性等动力特性。运用 *DARC* 程序已对多个型号转子或整机动力特性进行了分析,获得了满意效果。本文仅给出对某一模拟转子进行计算分析及实验分析结果,列于表 1。由表 1 可见,不考虑端齿影响,计算值相对于实验值的相对误差为 2.7%~6.6%;如果不考虑轴力影响,计算值相对于实验值的相对误差为 2.5%~6.0%;利用本文方法既考虑端齿又考虑轴力影响时,误差仅 1%。仅就这种只有两对端齿的转子而言,端齿及轴力对动力特性影响是不容忽视的,而实际工程中转子端齿数比两对多,如某机转子具有 6 对端齿,它们对动力特性影响更大些。

表 1 某模拟转子固有频率计算实验结果

实 验 值			计 算 值					
轴力 H (N)	频率 n (r/min)	不考虑端齿		不考虑轴力		本文方法		
		n(r/min)	误差	n(r/min)	误差	n(r/min)	误差	
19613	一阶	78000	80282	2.9%	76132	2.5%	76919	1.3%
	二阶	84600	89641	6%	84040	< 1%	85374	1%
53936	一阶	78200	82559	5.6%	76132	2.6%	77752	1%
	二阶	88200	90937	3.1%	84040	4.7%	88100	1%
70607	一阶	78200	83374	6.6%	76132	2.6%	78001	1%
	二阶	89400	91794	2.7%	84040	6%	89515	1%

参 考 文 献

1 欧园霞等. 转子动力特性有限元分析. 中国航空科技文献, HJB860414, 1986
2 尹泽勇等. 轴力随转速变化及其对转子动力特性的影响. 固体力学学报, 1993, (3)
3 尹泽勇等. 端齿轴段刚度及其对转子动力特性的影响. 振动工程学报, 1992, (3)

(责任编辑 王震华)