

叶轮机机械失速颤振的全三维数值分析方法

清华大学 井有浩 陈佐一 胡志刚

【摘要】 给出了建立在全三维 N-S 方程求解基础上的叶轮机机械失速颤振分析的数值方法。包括用定常 N-S 方程求解三维粘性失速流和用三维 N-S 振幅方程求解三维粘性失速振荡流。为了验证方法的准确性,用压气机环形叶栅的失速流实验和振荡叶片振荡流场的实验作了对比,同时应用本方法分析了某 30 万千瓦汽轮机末级叶片的失速颤振。

主题词: 三元系 方程 叶轮机机械 失速 颤振

分类号: V 231.3 V 215.34

1 引言

建立在全三维粘性流体力学方程基础上的叶轮机机械失速颤振的完全的数值分析方法,是一个相当困难的问题。迄今为止,一般还是应用特征面上的二元流求解,或者采用半经验方法求解。本文是应用参数多项式方法直接求解三维 N-S 的定常方程和振幅方程,从而在此基础上建立了在全三维 N-S 方程求解基础上的叶轮机机械失速颤振分析的数值方法。由于参数多项式方法具有不必进行坐标变换的突出优点,可直接对圆柱坐标系下的 N-S 方程直接进行求解。考虑到失速流动的特性要求,采用了定常速度变量的三次多项式。并用此方法计算了已有详细实验结果的压气机叶栅在大攻角下的三维失速流,证明计算结果与实验结果是符合的,也证明了该方法的可行性。应用它计算了某 30 万千瓦汽轮机末级叶片在小工况下的失速流场。在求解三维 N-S 振幅方程中,考虑到振荡量总是由振荡源开始自大至小衰减,故采用振幅参数的二阶多项式已足够精确。应用本方法计算了 30 万千瓦汽轮机在相对流量(即 $G/G_{\text{设计}}$) 为 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 下的定常流场和振荡流场,并计算了三阶弯振频率,从而完成了建立在全三维 N-S 方程求解基础上的叶轮机机械失速颤振分析的数值方法。

2 基本方程和方法

圆柱坐标系下三维粘性可压缩流的基本方程为:

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho r W_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho r W_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho r W_z) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left[W_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + W_\varphi \frac{r}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{W_\varphi^2}{r} - 2W_\varphi \Omega - r\Omega^2 \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial z} \right] - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} \quad (2)$$

$$\rho \left[W_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + W_\varphi \frac{r}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} - \frac{W_r W_\varphi}{r} + 2\Omega W_r \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\tau_{r\varphi})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(r\tau_{\varphi z})}{\partial z} \right] + \frac{\tau_{r\varphi}}{r} \quad (3)$$

$$\rho \left[W_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + W_\varphi \frac{\partial V_z}{r \partial \varphi} + W_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial (r \tau_{zz})}{\partial z} \right] \quad (4)$$

$$\vec{W} \cdot \nabla H = \Phi / \rho \quad (5)$$

其中, $\tau_{rr}, \tau_{r\varphi}, \dots$ 等为剪应力, 如: $\tau_{rr} = (-p - 2/3 \mu \nabla \cdot \vec{W}) + 2\mu (\partial V_r / \partial r)$ 等等。

其中粘性系数 μ 可用湍流粘性 μ_τ 来描述。在本文计算中, 采取等 μ_τ 的简化模型, 而能量方程则采用一个考虑粘性摩擦后的多变过程来取代。应用多变过程在动量方程中消去 p , 则在动量方程和连续方程中只剩下未知参数 W_r, W_φ, W_z 和 ρ 。对于这 4 个参数, 均采用对 r, φ 坐标的三次多项式, 即:

$$W_r = A_1 r^3 + A_2 r^2 + A_3 \varphi + A_4 \varphi^2 + A_5 r \varphi + A_6 \quad (6)$$

$$W_\varphi = B_1 r^3 + B_2 r^2 + B_3 \varphi + B_4 \varphi^2 + B_5 r \varphi + B_6 \quad (7)$$

$$W_z = C_1 r^3 + C_2 r^2 + C_3 \varphi + C_4 \varphi^2 + C_5 r \varphi + C_6 \quad (8)$$

$$\rho = D_1 r^3 + D_2 r^2 + D_3 \varphi + D_4 \varphi^2 + D_5 r \varphi + D_6 \quad (9)$$

这里系数 $A_1, A_2, \dots, D_5, D_6$ 均是坐标变量 z 的函数, 亦即是将三元函数 W_r, W_φ, W_z 和 ρ 表示为如 (6) - (9) 式所示的参数多项式形式。将参数多项式代入求解的基本方程, 使得原来求解流动参数的问题转化为求解参数多项式系数的问题。把求解偏微分方程转化为求解常微分方程。从而使求解过程大为简化。若将参数多项式系数的导数作为待求变量的形式, 则更为简单。例如, 连续方程就具有下述形式:

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{dC_1}{dz} + A_{12} \frac{dC_2}{dz} + A_{13} \frac{dC_3}{dz} + A_{14} \frac{dC_4}{dz} + A_{15} \frac{dC_5}{dz} + A_{16} \frac{dC_6}{dz} + A_{17} \frac{dD_1}{dz} \\ & + A_{18} \frac{dD_2}{dz} + A_{19} \frac{dD_3}{dz} + A_{20} \frac{dD_4}{dz} + A_{21} \frac{dD_5}{dz} + A_{22} \frac{dD_6}{dz} = V_1 \end{aligned} \quad (10)$$

式中将 $dC_1/dz, dC_2/dz$ 等作为待求未知量。而 $A_{11}, A_{12}, \dots$ 等等都只是包含了多项式系数和坐标值 r, φ 类似地, 也可以写出上述形式的动量方程。边界条件也需用参数多项式形式写出。如 $r = r_b, \varphi = \varphi_b$ 的物面边界上, 若速度为零, 则有: $W_r = A_1 r_b^3 + A_2 r_b^2 + A_3 \varphi_b + A_4 \varphi_b^2 + A_5 r_b \varphi_b + A_6 = 0$ 等等。这样, 我们对于每一个 $z = \text{const}$ 的截面, 选取合适的内点和边界点, 将它们所构造的方程组进行数值求解, 得到全场的参数多项式系数值, 也就得到了全场的三元解。

根据圆柱坐标系下非定常的连续方程和 N-S 方程转化为相应的振幅方程为:

$$\begin{aligned} & i\omega \bar{\rho} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{W}_r + \bar{\rho} \tilde{W}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{W}_\varphi + \bar{\rho} \tilde{W}_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{W}_z + \bar{\rho} \tilde{W}_z)}{\partial z} = 0 \quad (11) \\ & \left\{ i\omega \bar{W}_r + \bar{W}_r \frac{\partial \bar{W}_r}{\partial r} + \bar{W}_r \frac{\partial \tilde{W}_r}{\partial r} + \frac{\bar{W}_\varphi \partial \bar{W}_r}{r \partial \varphi} + \frac{\bar{W}_\varphi \partial \tilde{W}_r}{r \partial \varphi} + \bar{W}_z \frac{\partial \bar{W}_r}{\partial z} + \bar{W}_z \frac{\partial \tilde{W}_r}{\partial z} \right\} \\ & + \left\{ \bar{W}_r \frac{\partial \tilde{W}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{W}_\varphi \partial \tilde{W}_r}{r \partial \varphi} + \tilde{W}_z \frac{\partial \tilde{W}_r}{\partial z} \right\} - \bar{\rho} \frac{2\bar{W}_r \bar{W}_\varphi}{r} - \bar{\rho} \frac{\bar{W}_\varphi^2}{r} - 2\Omega \tilde{W}_\varphi \bar{\rho} - 2\Omega \tilde{W}_\varphi \bar{\rho} - r\Omega^2 \bar{\rho} \\ & = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial (r \tau_{\varphi\varphi})}{\partial \varphi} + \frac{\partial (r \tau_{zz})}{\partial z} \right] - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} \end{aligned} \quad (12)$$

也可推得 φ 与 z 方向的振幅 N-S 方程; $\bar{\rho}, \bar{W}_r, \bar{W}_\varphi$ 等为振幅参数; $\bar{\rho}, \bar{W}_r, \bar{W}_\varphi$ 等为定常参数。

在叶片颤振分析中, 一般考虑叶片的扭振与弯振, 因此可以认为叶片不存在沿径向的振动, 即沿 r 方向的振幅为零。这样要求解的只是 $\bar{W}_r, \bar{W}_\varphi, \bar{\rho}, \bar{p}$ 等振幅参数。将过程振幅方程代入振幅动量方程而消去 $\bar{p}$, 则待求解的只有 $\bar{W}_\varphi, \bar{W}_z, \bar{\rho}$ 三个振幅参数。采用对 φ, r 的二次多项式则有:

$$\overline{W}_\varphi = A_1 r^2 + A_2 r + A_3 \varphi + A_4 \varphi^2 + A_5 \varphi^3 + A_6$$

$$\overline{W}_z = B_1 r^2 + B_2 r + B_3 \varphi + B_4 \varphi^2 + B_5 \varphi^3 + B_6$$

$$\overline{\rho} = C_1 r^2 + C_2 r + C_3 \varphi + C_4 \varphi^2 + C_5 \varphi^3 + C_6$$

将上述多项式代入振幅连续方程和振幅 N-S 方程, 同样可以得到以多项式系数导数为待求未知量的表达式。

依据粘性流动的振荡边界条件, 即叶片的振荡速度即是叶片上流体的振荡速度, 即可写出边界条件的关系式。在 $r = r_B$, $\varphi = \varphi_B$ 的叶片表面上的振荡速度为 $\overline{W}_{zB}$, 则有:

$$\overline{W}_{zB} = B_1 r_B^2 + B_2 r_B + B_3 \varphi_B + B_4 \varphi_B^2 + B_5 \varphi_B^3 + B_6$$

同样, 采用合适的内点的基本方程和边界点关系式所组成的方程组, 即可求解全部振幅参数多项式的系数, 从而求得振荡流场。

3 算 例

为了验证方法的准确性, 计算了文献[3]提供的压气机叶栅在大攻角下的分离流场。实验的工况参数为: 进口总压 $P_0 = 508.3 \text{ Pa}$, 进口速度 $V_0 = 32.8 \text{ m/s}$, 进气角 59° , 进口攻角 22.8° 。实验得到的速度分布如图 1 所示。

应用上述的方法, 计算了压气机叶栅的三维分离流动, 计算结果和实验值符合得较好。图 2(a)、(b) 分别表示该叶栅在两截面上的速度分布, 它是由三维流动计算得到的 W_z 和 W_φ 的合

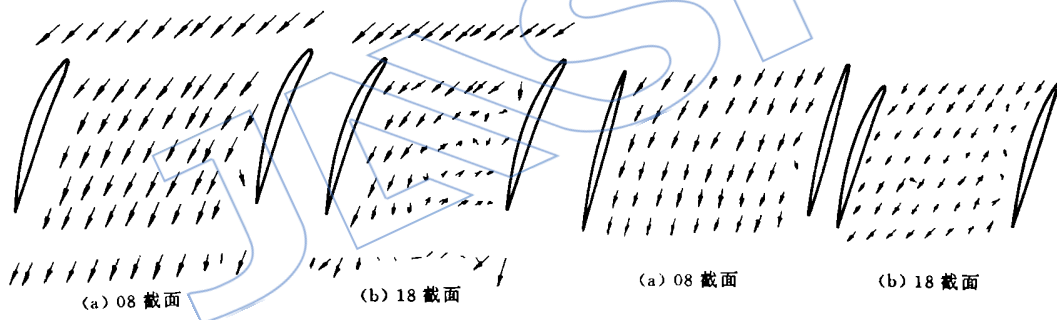


图 1 实验速度分布

图 2 计算速度分布

成。从计算和实验的对照中可以看出, 在进口攻角为 22.8° 的条件下, 在 08 截面上, 基本上没有分离, 但在靠近叶片顶部的 18 截面上, 则出现了很大的分离区, 即分离区是沿叶根向叶顶部位逐渐增大。计算和实验都证明了这一点, 且分离区的大小与实验值也符合得很好。对某 30 万千瓦汽轮机组末级叶片在各种流量条件下的定常流场和振荡流场进行计算, 该机组末级叶片的设计工况的参数为: 级前总温 67.3°C , 级前总压 0.027 MPa , 静叶压差 0.0131 MPa , 级压差 0.0222 MPa , 背压 4.9 kPa , 流量 549.488 吨/小时 。对相对流量 ($G/G_{\text{设计}}$) 为 $1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ 五种工况进行计算, 图 3(a)、(b) 分别表示在 $G/G_{\text{设计}}$ 为 0.6 和 0.4 时在叶片中部截面处的速度分布。可以看出, 当 $G/G_{\text{设计}} = 0.4$ 时, 分离区明显地大于 $G/G_{\text{设计}} = 0.6$ 时的工况。

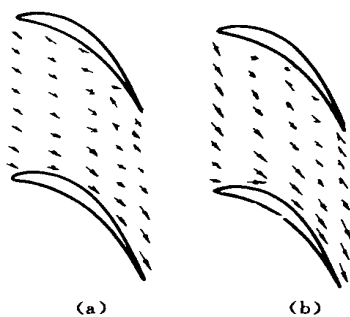


图 3 300MW 汽轮机末级叶片中部截面处速变分布

分别计算了在 3 种动频条件下的叶片气弹稳定性分析。图 4 表示在叶片一、二、三阶弯振

频率(分别为 674, 1020, 2493 rad/s)时的相对流量与非定常气动力做功的关系曲线。可以看出对于一、二阶振频, 相对流量在小于 0.4 时即发生气弹不稳定性, 而在三阶振频下, 则不发生颤振。

为了验证计算振荡流场的准确性, 还将计算结果与振荡叶片非定常气动力的实验结果作了对比, 如图 5 所示。证明了这方法的工程适用性。

为了验证方法的通用性, 又分析了某 200MW 汽轮机末级叶片的失速颤振, 为一阶振频下的非定常气动力做功与流量的关系曲线如图 6 所示。

利用本文所提出的参数多项式方法求解三维分离流与振荡流, 计算一个工况只需要十几分钟(在 486 微机上), 显示了这个方法的极大优点。特别对于工程应用中如安全性分析, 现场故障诊断等需要快速求解

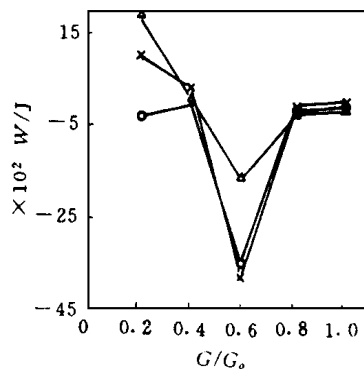


图 4 各种弯振频率的颤振分析

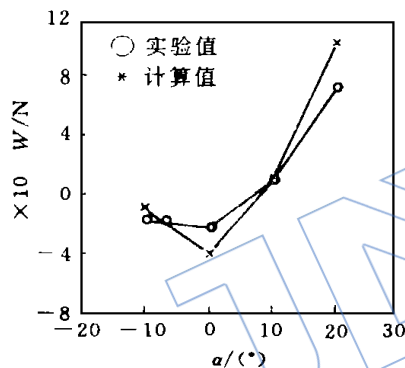


图 5 计算值与实验值对比

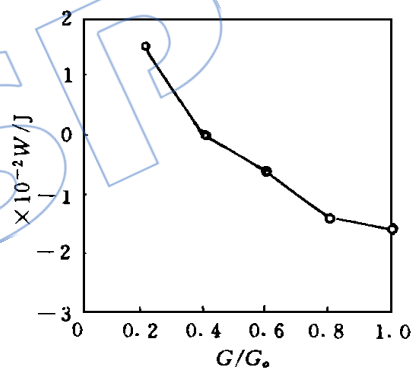


图 6 非定常气动力做功与流量的关系

的问题, 更具有独到的优势。当然, 这个方法的研究也还只是初步的, 需要在应用不断改进。

参 考 文 献

- 1 陈佐一, 舒红. 求解复杂流动的参数多项式方法. 工程热物理学报, 1990, 11(1)
- 2 陈佐一等. 振荡流体力学. 水电出版社, 1988
- 3 李宇红. 环形压气机叶栅三维分离流动的实验研究与数值模拟. [学位论文] 清华大学博士论文, 1992

(责任编辑 魏星禄)