

# 盘—鼓结构体—壳过渡元的 ‘虚假应力’现象及改进方法

西北工业大学 陆山\*\* 吕文林

**【摘要】** 分析了体—壳过渡元中产生“虚假应力”现象的根本原因,给出了两种改进方法。方案一是在采用体元应力应变模型的基础上提出了一种单元内位移、应变及应力的直接修改方法;方案二是将采用壳体应变应力状态的三维体—壳过渡元推广到轴对称,给出了具体公式。通过几个算例将上述两种方法与改进前方法进行了比较,结果表明本文提出的两种方案均大大改善了轴对称问题体壳过渡元的“虚假应力”现象,相比之下,前者公式简单,更易于实现。

主题词: 有限元法 应力分析 轴对称体

分类号: O242.21 V231.9

## 1 引言

发展了一套轴对称问题有限元分析程序系统 AFEM<sup>[1]</sup>,其主要有3种单元模式:考虑离心力与温度应力的8结点等参环单元;2节点锥壳元和6节点体—壳过渡环单元。早期的轴对称体—壳过渡环单元与三维体—壳过渡元一样不可避免地出现沿壳法线方向应变的不协调现象而致严重的“虚假应力”<sup>[2]</sup>,特别是在考虑温度或离心载荷的情况下,这一现象尤为明显。本文的目的就是针对这一问题提出改进的方法。

## 2 体—壳过渡元的‘虚假应力’现象及改进方法

### 2.1 体—壳过渡元的‘虚假应力’现象

考虑离心力及温度应力的6节点体—壳过渡环单元截面如图1所示,节点6与壳体对接,节点2、3、4与8节点等参环单元对接。为后面描述方便,单元节点局部编号与文献[2]不同。单元位移插值由下式给出。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^6 N_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} + N_6(\eta) \xi \frac{t}{2} \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \alpha(1)$$

其中形状函数参见文献[2],只是形函编号需按本文节点编号重新排列。物理关系与8节点等参环单元物理关系相同,几何矩阵可见文献[2]。由(1)式可看出,这种过渡元位移模型在节点6没有

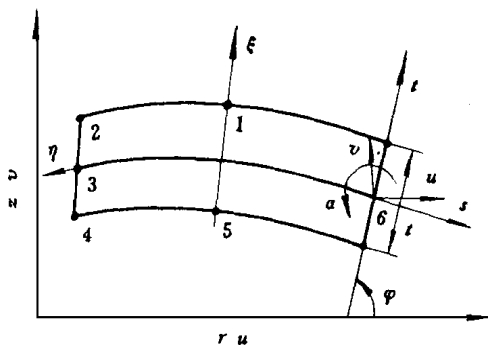


图1 6节点过渡环单元

考虑沿  $\xi$  方向的变形。换句话说,模型中只允许通过节点 6 的单元端面线(实际上是一环形面)具有扭转变形  $\alpha$ , 而没有长度变化。这一点是这种体—壳过渡元模型的不足之处,也是产生“虚假应力”的主要原因,由后面的算例也可清楚地看出这一现象。

## 2.2 对过渡元“虚假应力”现象的改进方案

方案 1: 在过渡元节点 6, 一般沿厚度  $\xi$  方向相对尺寸很小, 可将其按平面应力状态处理, 因此在节点 6 沿壳厚度方向  $\sigma_r = 0$ , 而  $\epsilon$  不为零, 由物理关系可得:

$$\epsilon = [-\nu/(1-\nu)](\epsilon_\theta + \epsilon_\phi) + [(1+\nu)/(1-\nu)]\alpha\Delta T \quad (2)$$

因此给出如下改进方案: 在求出全场位移解后, 首先在过渡元内节点 6 沿曲线坐标  $\eta$  的切线方向作一局部坐标系  $(s, t)$  (如图 1), 将该点处的应变分量从  $(r, z)$  坐标系转到  $(s, t)$  坐标系, 从而沿坐标  $t$  方向应变分量  $\epsilon$  可由 (2) 式修正。接着采用修正的位移插值公式:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^6 N_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} + N_6(\eta)\xi \frac{t}{2} \left[ \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \epsilon \right] \quad (3)$$

求过渡元内任一点处的位移, 求应变可采用修正的几何关系:

$$[\epsilon \quad \epsilon_\theta \quad \epsilon_\phi \quad \gamma_{rz}]^T = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4 \quad B_5 \quad B_6 \quad B_\alpha \quad B_\epsilon] [\delta_1 \quad \cdots \quad \delta_6 \quad \alpha \quad \epsilon]^T \quad (4)$$

其中  $[B_i]$  参见文献 [2]。

$$[B_\alpha] = [-B\sin\varphi \quad C\cos\varphi \quad -F\sin\varphi \quad B\cos\varphi \quad -C\sin\varphi]^T$$

$$[B_\epsilon] = [B\cos\varphi \quad C\sin\varphi \quad F\cos\varphi \quad B\sin\varphi \quad C\cos\varphi]^T$$

$$B = [A_{12}(\partial N_6/\partial \eta)\zeta + A_{11}N_6](t/2)$$

$$C = [A_{22}(\partial N_6/\partial \eta)\zeta + A_{21}N_6](t/2)$$

$$F = N_6\zeta/2r$$

$A_{ij}$  为雅可比矩阵的逆阵的对应元素。(4) 式中等式右端前 7 项即修改前的各项, 最后一项是因为  $\epsilon$  所引起的修改项。如需要还可将求出的其它各点应变转到  $(s, t)$  坐标系按前述方法再行修正, 再转回  $(r, z)$  坐标系求解应力。

方案 2: 采用壳体应变应力状态的体—壳过渡环单元

文献 [3] 曾提出了采用壳体应变应力状态的三维问题体—壳过渡单元(只考虑 5 个独立应力应变分量), 并收到了良好效果。本文将此方法推广到轴对称(只考虑 3 个独立应力应变分量), 给出采用壳体应变应力状态的体—壳过渡环单元公式。

建立如图 1 所示  $(s, t)$  局部坐标系, 则在总体及局部坐标系下位移的转换关系为:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [\theta] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad [\theta] = [V_1 \quad V_2]$$

其中  $[\theta]$  为坐标转换矩阵,  $V_i$  ( $i=1, 2$ ) 为沿着局部坐标  $(s, t)$  方向的单位坐标向量。在局部坐标系下几何关系为:

$$[\epsilon \quad \epsilon_\theta \quad \gamma_{st}]^T = [B'_1 \quad B'_2 \quad B'_3 \quad B'_4 \quad B'_5 \quad B'_6 \quad B'_\alpha] [\delta_1 \quad \cdots \quad \delta_6 \quad \alpha]^T \quad (5)$$

若仍定义新的雅可比行列式的逆阵为:

$$[J]^{-1} = [\theta]^T [J]^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

则几何矩阵可表示为

$$[B_i'] = \begin{bmatrix} A_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ \frac{\theta_{11} N_i}{r} & \frac{\theta_{12} N_i}{r} \\ A_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + A_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & A_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} [\theta]^T \quad (i = 1, 2, \cdots, 6)$$
$$[B_\alpha'] = \frac{t}{2}(\mathfrak{T} B_6' + N_6[C]) \begin{bmatrix} -\sin\Phi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{21} \\ 0 & 0 & A_{12} \end{bmatrix}^T [\theta]^T$$

物理关系为:

$$\{\sigma\} = [\sigma_s \quad \sigma_\theta \quad \tau_{\tau}]^T = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon^T\}) \tag{6}$$

其中

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \{\epsilon^T\} = \alpha \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

刚度矩阵 $[K]$ 、温度等效单元节点载荷 $\{F^T\}$ 及离心力等效单元节点载荷 $\{F^C\}$ 可表示如下:

$$[K] = 2\pi \int_1 \int_1 r [B]^T [D] [B] J d\zeta d\eta \tag{7}$$

$$\{F^T\} = 2\pi \int_1 \int_1 r [B]^T [D] [\epsilon^T] J d\zeta d\eta \tag{8}$$

$$\{F^C\} = 2\pi \int_1 \int_1 \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & N_6 & 0 & -\frac{N_6 \mathfrak{T}}{2} \sin\Phi \end{bmatrix}^T r^2 \rho \omega^2 J d\zeta d\eta \tag{9}$$

3 数值算例

算例 1: 薄壁筒等温膨胀。模型见图 2, 取一个 8 节点等参元、一个 6 节点过渡元和一个 2 节点锥壳元。有关数据取:  $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $R = 100 \text{ mm}$ ,  $t = 5 \text{ mm}$ ,  $L = 20 \text{ mm}$ ,  $\Delta T = 100^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}$ 。计算结果见表 1。

算例 2: 受离心力作用薄壁筒。转数  $n = 12000 \text{ r/min}$ , 材料密度  $\rho = 1 \times 10^{-5} \text{ kg/mm}^3$ ,  $\Delta T = 0^\circ\text{C}$ , 其它数据同算例 1。本例取两种单元模型, 模型 1 同例 1; 模型 2 仅取一个 6 节点过渡元, 几何尺寸及节点编号与例 1 中过渡单元相同。计算结果见表 2。

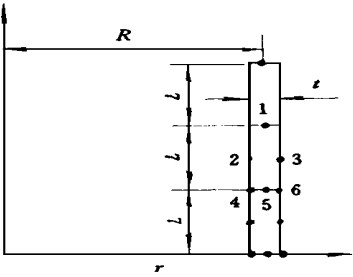


图 2 薄壁筒模型

表 1 等温膨胀薄壁筒结果(应力单位 MPa)

|                 |      | $\epsilon_r$           | $\epsilon_z$ | $\epsilon_\theta$ | $ \sigma_r $         | $ \sigma_z $ | $ \sigma_\theta $ |
|-----------------|------|------------------------|--------------|-------------------|----------------------|--------------|-------------------|
| 过渡<br>元节<br>点 1 | 修改前  | $0.26 \times 10^{-11}$ | 0.00127      | 0.00121           | 313.9                | 118.1        | 128.1             |
|                 | 方案 1 | 0.00116                | 0.00127      | 0.00121           | $1.0 \times 10^{-6}$ | 16.4         | 6.4               |
|                 | 方案 2 | 0.001198               | 0.001204     | 0.001200          | $1.0 \times 10^{-8}$ | 0.96         | 0.42              |
| 理论解             |      | 0.0012                 |              |                   | 0.000                |              |                   |

表 2 受离心力作用薄壁筒数值解( $|\sigma|$  表示  $\sigma_r$ 、 $\sigma_z$  和  $\tau_{rz}$  的绝对值)

| 节 点         |      | $\sigma/\text{MPa}$ |        |        |        |        |        | $\max \sigma $ |
|-------------|------|---------------------|--------|--------|--------|--------|--------|----------------|
|             |      | 1                   | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |                |
| 模<br>型<br>1 | 修改前  | 183.32              | 153.40 | 140.60 | 173.95 | 169.22 | 164.81 | 27.1           |
|             | 方案 1 | 156.76              | 164.04 | 152.20 | 163.61 | 158.67 | 153.97 | 3.3            |
|             | 方案 2 | 157.91              | 162.58 | 154.33 | 163.64 | 158.26 | 153.26 | 1.2            |
| 模<br>型<br>2 | 修改前  | 183.66              | 150.91 | 138.93 | 186.54 | 183.55 | 179.75 | 62.90          |
|             | 方案 1 | 156.68              | 163.23 | 151.89 | 161.83 | 158.14 | 153.78 | 1.07           |
|             | 方案 2 | 158.73              | 157.12 | 155.59 | 147.28 | 158.80 | 165.15 | 7.3            |
| 理 论 解       |      | 157.91              | 163.14 | 152.88 | 163.14 | 157.91 | 152.88 | 0.163          |

4 结 论

两算例中 8 节点等参元与壳元均给出了极好的数值解。而薄壁筒等温膨胀算例在过渡元的过渡节点处,修改前由于模型假设  $\epsilon=0$ ,而在其它点处  $\epsilon=0.0012$ ,从而导致严重的“虚假应力” $\sigma_r=313.9$ ,结果极不合理。用两种方案改进后结果均大为改观,方案 2 数值解精度优于方案 1。对受离心力作用的薄壁筒例,过渡元模型改进前误差较大,用两种方案改进后结果均明显改善,两种方案精度相当,在两种模型中两方案各有所长。

综上所述,(1)本文分析了过渡元产生虚假应力的根本原因;(2)在文献[2]的基础上增加了温度应力及离心力作用下的应力分析功能,并提出了一种简单有效的求过渡元内位移、应变及应力的改进公式;(3)将文献[3]的方法推广到轴对称问题有限元法模型,给出了采用壳体应变应力状态的体—壳过渡环单元的公式;(4)经数值算例检验两种改进方案均能有效地改进过渡元的“虚假应力”现象。相比之下,方案 1 公式简单,更易于实现。

参 考 文 献

1 陆山,彭志勇,吕文林. 鼓筒—盘—轴组合转子结构有限元分析程序系统. 中国航空学会 第七届发动机结构强度振动学术会议文集, 1994, 230– 234

2 李明达等. 有限元在燃气涡轮发动机零件强度计算中的应用. 北京: 国防工业出版社, 1987, 332– 337

3 尹泽勇. 现代燃气轮机转子循环对称接触应力分析. 北京: 国防工业出版社, 1994

(责任编辑 杨再荣)