

齿轮弯曲疲劳强度可靠性分析的新方法*

西北工业大学* 彭雄奇** 刘更 吴立言

【摘要】以三参数可靠性分析模型为基础,结合随机有限元法与齿轮的疲劳强度理论,提出了一种计算齿根弯曲疲劳强度的新方法。该方法考虑了影响齿轮可靠性的随机因素,如载荷、材料性能参数和刀具齿顶圆弧半径等,从而使得全面、合乎实际地对齿轮疲劳强度的可靠性预测成为可能。计算分析表明,刀具齿顶圆弧半径对齿轮弯曲疲劳强度可靠性的影响不能予以忽略。文中还讨论了其它随机因素以及齿轮的变位系数对齿轮可靠性的影响。

关键词: 随机 有限元 可靠性 齿轮 弯曲疲劳

分类号: V 215.55

1 引言

关于齿轮的可靠性预测技术目前尚无公认的成熟方法。国内报导较多的方法是近似概率法。文献[1]将随机有限元法应用于轮齿齿根弯曲疲劳强度的研究,提出了一种预测齿轮疲劳强度可靠性的方法。但其可靠性分析模型是以传统的二参数模型即一次二阶矩法为基础,且仅考虑了载荷和疲劳极限的随机性对齿轮弯曲疲劳强度可靠性的影响。已有一些文献对随机有限元法进行了研究^[2-3],但以往的随机有限元法往往建立在传统的二参数可靠性分析模型的基础上,且极少有文献报导过考虑结构几何随机性的随机有限元模型。文献[4]中提出了一种新的所谓“三参数可靠性分析模型”,简称“W - SOTM”。本文以这一可靠性分析模型为基础,提出了一种新的随机有限元模型,简称“W - SFEM”。利用这一新的随机有限元模型,综合考虑载荷、材料性能参数和刀具齿顶圆弧半径等随机因素对齿轮弯曲疲劳强度可靠性的影响。文中还分析了齿轮变位系数对其弯曲疲劳强度可靠性的影响。

2 随机有限元模型

2.1 三参数可靠性分析模型

设结构可靠性分析的临界函数为:

$$Y = g(X_1, \cdots, X_n) \quad (1)$$

式中 $X_1, \cdots, X_n$ 为影响结构可靠性的相互独立的随机变量,按文献[4],结构可靠度计过程为:

(1) 按式(2)计算函数 Y 的均值 M_Y , 方差 σ_Y^2 和偏度 S_{ky}

$$\left. \begin{aligned} \mu_y &= Y_\mu + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\alpha/\alpha_i)_\mu \sigma_i^2 \\ \sigma_y^2 &= Y_\mu^2 + \sum_{i=1}^n [(\alpha/\alpha_i)^2 + Y \partial Y / \alpha_i^2]_\mu \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n (\alpha/\alpha_i \cdot \partial Y / \alpha_i^2)_\mu S_{ki} \sigma_i^3 - \mu_y^2 \\ S_{ky} &= \{Y_\mu^3 + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n [2Y (\alpha/\alpha_i)^2 + Y^2 \partial Y / \alpha_i^2]_\mu \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n [(\alpha/\alpha_i)^3 \\ &\quad + 3Y \cdot \alpha/\alpha_i \cdot \partial Y / \alpha_i^2]_\mu S_{ki} \sigma_i^3 - \mu_y^3 - 3\mu_y \sigma_y^2\} / \sigma_y^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, $\mu_i, \sigma_i^2, S_{ki}$ —随机变量 $X_i (i=1, \dots, n)$ 的均值、方差、偏度; $Y_\mu = g(\mu_1, \dots, \mu_n)$; $()_\mu$ —函数在 $x_i = \mu_i (i=1, \dots, n)$ 点的值。

(2) 由式(3)求解 Y 的等效威布尔分布的三参数 η, β 和 X_0

$$\left. \begin{aligned} \mu_y &= \eta \Gamma(1 + 1/\beta) + X_0 \\ \sigma_y^2 &= \eta^2 [\Gamma(1 + 2/\beta) - \Gamma^2(1 + 1/\beta)] \\ S_{ky} &= \eta^3 [\Gamma(1 + 3/\beta) - 3\Gamma(1 + 2/\beta)\Gamma(1 + 1/\beta) + 2\Gamma^3(1 + 1/\beta)] / \sigma_y^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中, $\Gamma()$ —Gamma 函数; β, η, X_0 —Weibull 分布的形状参数、尺度参数和位置参数。

(3) 按式(4)计算结构可靠度

$$R = P\{g(X) > 0\} = \exp[-(-X_0/\eta)^\beta] \quad (4)$$

2.2 基于三参数可靠性分析模型的随机有限元法方程

线弹性有限元方程及其中的刚度矩阵 $[K]$ 分别为:

$$[K]\{u\} = \{f\} \quad (5)$$

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (6)$$

设影响结构可靠性的随机因素为 $b_1, \dots, b_n$, 它们相互独立, 均值、方差和偏度分别为 μ_i, σ_i^2 和 $S_{ki} (i=1, \dots, n)$, 则式(5)两边分别对 b_i 求一次、二次偏导数有:

$$[K]\partial\{u\}/\partial b_i = \partial\{f\}/\partial b_i - \partial[K]/\partial b_i \{u\} \quad i=1, \dots, n \quad (7)$$

$$[K]\partial^2\{u\}/\partial b_i^2 = \partial^2\{f\}/\partial b_i^2 - \partial^2[K]/\partial b_i^2 \{u\} - 2\partial[K]/\partial b_i \cdot \partial\{u\}/\partial b_i \quad i=1, \dots, n \quad (8)$$

单元节点(或高斯点)应力计算式及其分别对 b_i 求一次、二次偏导数有:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{u\} \quad (9)$$

$$\partial\{\sigma\}/\partial b_i = \partial[D]/\partial b_i \cdot [B]\{u\} + [D]\partial[B]/\partial b_i \cdot \{u\} + [D][B]\partial\{u\}/\partial b_i \quad i=1, \dots, n \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \partial^2\{\sigma\}/\partial b_i^2 &= \partial^2[D]/\partial b_i^2 \cdot [B]\{u\} + [D]\partial^2[B]/\partial b_i^2 \cdot \{u\} + [D][B]\partial^2\{u\}/\partial b_i^2 \\ &\quad + 2\partial[D]/\partial b_i \cdot \partial[B]/\partial b_i \cdot \{u\} + 2\partial[D]/\partial b_i \cdot [B] \cdot \partial\{u\}/\partial b_i + 2[D]\partial[B]/\partial b_i \cdot \partial\{u\}/\partial b_i \quad i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (11)$$

将(5)~(10)和(11)式在均值点 $(\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ 处依次求解出 $\{u\}$, $\partial\{u\}/\partial b_i$, $\partial^2\{u\}/\partial b_i^2$, $\{\sigma\}$, $\partial\{\sigma\}/\partial b_i$ 和 $\partial^2\{\sigma\}/\partial b_i^2 (i=1, \dots, n)$, 对应结构可靠性分析的临界函数, 由式(2), (3)和(4)可求出结构可靠度 R 。在线弹性问题中, 当考虑弹性模量 E 的随机性时, 理论分析和实际计算均表明: $\partial\{\sigma\}/\partial E = \partial^2\{\sigma\}/\partial E^2 = \{0\}$, 这说明 E 的随机性在线弹性问题中对结构可靠性没有影响。

3 轮齿齿根过渡曲线方程

由文献[5]可知, 齿根过渡曲线是由齿条刀具的齿顶圆弧部分加出的, 则刀具齿顶圆弧半

径的随机性势必引起齿根过渡曲线形状上的随机性, 从而影响最大弯曲应力, 故有必要考虑刀具齿顶圆弧半径对齿轮弯曲疲劳强度可靠性的影响。按文献[5], 齿轮齿根过渡曲线方程式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= (r - x_c - \rho_0 \cos \gamma) \cos \varphi + (x_c \operatorname{tg} \gamma + \rho_0 \sin \gamma) \sin \varphi - r_f \cos \pi / Z \\ y &= (r - x_c - \rho_0 \cos \gamma) \sin \varphi - (x_c \operatorname{tg} \gamma + \rho_0 \sin \gamma) \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中参数 γ 的变动范围为: $0 \leq \gamma \leq (\pi/2 - \alpha)$ (13)

而滚动角 φ 为: $\varphi = (y_c + x_c \operatorname{tg} \gamma) / r$ (14)

在(12)~(14)式中, Z —齿轮齿数; r —齿轮分度圆半径; r_f —齿轮齿根圆半径; m_t —端面模数; α —端面压力角; x_i —变位系数; ρ_0 —刀具齿顶圆弧半径; $x_c = (h_{at}^* - x_i)m_t - \rho_0 \sin \alpha$; $y_0 = (\pi/4 + x_i \operatorname{tg} \alpha)m_t$; $y_c = y_0 + x_c \operatorname{tg} \alpha + \rho_0 / \cos \alpha$;

另外, 很容易求得: $dx_c/d\rho_0 = -\sin \alpha$, $dy_c/d\rho_0 = \cos \alpha$ 。由式(12)和(14), 很容易求得 $dx/d\rho_0$, $dy/d\rho_0$, $d^2x/d\rho_0^2$ 和 $d^2y/d\rho_0^2$ 。则利用作者提出的平面问题随机有限元方程可以方便地考虑由于刀具齿顶圆弧半径引起的几何随机因素对齿轮弯曲疲劳强度可靠性的影响。

4 算例及结果分析

计算了一标准直齿轮的齿根弯曲疲劳强度可靠度。齿轮参数为: $Z = 20, m = 1 \text{ mm}, \alpha = 20^\circ$, 其有限元计算模型如图 1 所示。对于齿根弯曲疲劳强度, 临界函数为: $g(X) = \alpha - \sigma_{eff}$ 。式中, α —疲劳极限; σ_{eff} —按某一强度理论等效的应力, 取弯曲应力 σ ; X —影响齿根弯曲疲劳强度可靠性的相互独立的基本随机变量 $X_i (i = 1, \dots, n)$ 。取基本随机变量为载荷 P , 材料泊桑比 ν , 刀具齿顶圆弧半径 ρ_0 , 疲劳极限 α 。各随机变量的均值、均方差和偏度见表 1。该齿轮的齿根弯曲疲劳强度的可靠度如表 1 中的(1)所示。

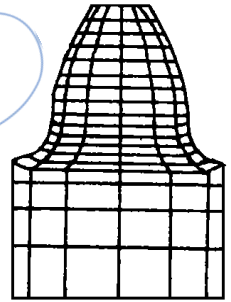


图 1 齿轮有限元计算模型

表 1 各随机变量参数及结果的对比

	P	α	ν	(1)		(2)	
				ρ_0	g	ρ_0	g
均值 N	140 N	561 M Pa	0.3	0.38 mm	84.28349	0.38	84.38973
均方差 σ	10	45	0.03	0.038	56.43594		56.42733
偏度 S_K	0.1	0	0	0	-0.016139		-0.021797
可靠度 R				0.927817		0.927957	

刀具齿顶圆弧半径 ρ_0 对齿轮可靠度影响。只取 P, α 和 ν 为随机变量且参数不变, 不考虑 ρ_0 的随机性得到齿轮可靠度如表 1 中的(2)所示。结果对比表明: 刀具齿顶圆弧半径 ρ_0 的随机性对齿轮可靠性的影响不能予以忽略; 反之将得到虚假的较高的弯曲疲劳强度可靠度。

材料泊桑比 ν 对齿轮可靠性的影响。只取 P, α 和 ρ_0 为随机变量且参数不变, 不考虑 ν 的随机性计算得: $\mu_g = 84.28654 \text{ M Pa}, \sigma_g = 56.43514, S_{Kg} = -0.016303, R = 0.927822$ 。与表 1 中的(1)对比可以看出: ν 的随机性对齿轮弯曲疲劳强度可靠性影响不大。

随机变量变异系数 C 的影响。保持各随机变量的均值和偏度不变, 依次改变 P, α 和 ρ_0 的变异系数 C , 其对齿轮可靠度的影响如图 2 所示。从图 2 可见, 随着各随机变量变异系数的增大, 齿轮可靠度均呈下降趋势, 其中 P 和 α 的变异系数的影响最为明显。因此为了提高齿轮的

可靠性,一方面要降低载荷和疲劳极限的离散性,另一方面加工齿轮的刀具的齿顶圆弧半径应具较小的公差范围。

随机变量偏度 S_k 的影响。随机变量的均值和方差不变,依次改变 P , α 和 ρ_0 的偏度 S_k , 其对齿轮可靠度的影响如图 3 所示。从图 3 可以看出,随着 α 和 ρ_0 的偏度的增加,齿轮可靠度增加,其中 α 的偏度的影响最为明显。但对 P 而言,其偏度的影响正好相反。

齿轮变位系数 x_0 (非随机变量) 的影响。保持各随机变量的参数不变,改变齿轮的结构参数 x_0 , 其对齿轮可靠性的影响如图 4 所示。从图 4 可见,变位系数对齿轮的弯曲疲劳强度可靠性有着很明显的影,随着 x_0 的增大,齿轮可靠度显著提高。因此为了保证齿轮的弯曲疲劳强度可靠性,应尽量避免采用负变位齿轮。

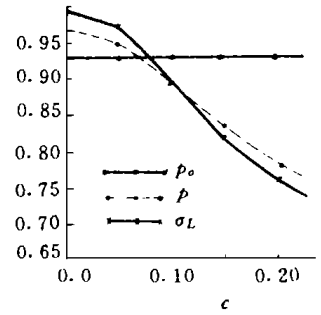


图2 变异系数 C 的影响

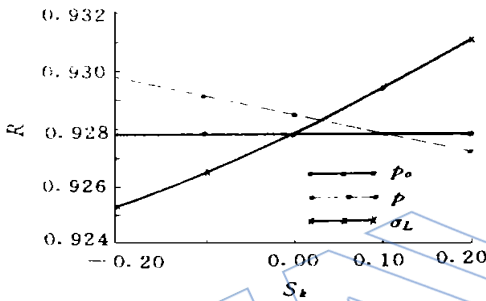


图3 偏度 S_k 的影响

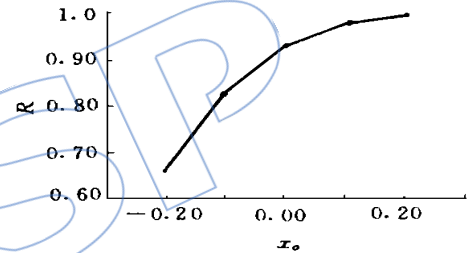


图4 齿轮变位系数 x_0 的影响

本文将随机有限元法结合新的可靠性分析模型并应用于直齿轮齿根弯曲疲劳强度可靠性分析,为全面而又比较精确地计算复杂结构零件的可靠度提供了一种行之有效的方法。该方法计算方便、精度高,其进一步的研究将使它适用于更多的领域。

参 考 文 献

- 1 吴立言,刘更,王步瀛 齿轮可靠度计算的概率有限元法 机械传动,1992,16(2): 1- 4
- 2 Yamazaki F, Shinozuka, M, et al Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis, J. Engrg Mech, A SCE, 1987, 114(8): 1335- 1354
- 3 Ghanem R and Spanos PD. Specbral Stochastic Finite Element Formulation for Reliability Analysis, J. Engrg Mech, A SCE, 1991, 117(10): 2351- 2372
- 4 Wu Li Yan et al An Approach to Increase the Precision of Reliability Analysis, Proceeding of the First China/Japan International Symposium on Machine Elements Beijing, in China, 1993
- 5 朱景梓主编 渐开线齿轮变位系数的选择,人民教育出版社,1982

(责任编辑 王震华)

damage strength, we can determine its overall fatigue quantity in the working life. And based on the fatigue cumulative damage probabilistic model, the part's fatigue reliability and life can be predicted. An aeroengine compressor is taken for example to show how to use the surplus fatigue damage strength for predicting the blade's fatigue reliability and life.

Key words Compressors Blades Reliability Fatigue life

A NEW RELIABILITY ANALYTICAL METHOD FOR BENDING FATIGUE STRENGTH OF GEARS

Peng Xiongqi, Liu Geng, Wu Liyan

(5th Dept. Northwest Polytechnical University, Xian 710072)

ABSTRACT Based on the three-parameters reliability analysis model and the fatigue theory of gears, a new reliability analytical method for the bending fatigue strength of tooth root is proposed by use of blending stochastic finite element method. This method takes into account such random factors for the reliability of gears, as load, fatigue limit, the material parameters and radius chamfer of tool. Analyses completed with this method indicate: The radius chamfer of tool has unignorable effect on the reliability of gears' bending fatigue strength; In the linear elastic problems, the Young's modulus has no effect on the structure reliability; The Poisson ratio has a little leverage on the gears' reliability; But the gears' reliability reduces with the increase of variation coefficients of the above-mentioned random factors; So the gear's reliability will increase as the skewnesses of fatigue limit and the radius chamfer of tool rise. But the skewness of load has an inverse influence. This paper also considers the modified coefficient's (no random factor) effect on the gears' reliability.

Key words Stochastic finite element method Reliability Gears Bending fatigue

MEASUREMENT AND EXPRESSION OF MAIN CHARACTERISTICS OF NiTi SHAPE MEMORY ALLOY WIRES

Du Yanliang and Nie Jingxu

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT Experiments and analyses of the main characteristics of NiTi alloy wires were completed to research their ability in active detection and control of cracks growth as the special requirements of the intelligent material structures. The expressions of the main characteristics as recovery force and other parameters are deduced on the basis of measurements. The research results show that the NiTi alloy wires are very good functional materials for manufacturing the intelligent structures capable of actively detecting and controlling the growth of cracks and vibration.

Key words Shape memory alloys Characteristic measurement Recovery effect

OPTIMIZATION FOR REDUCING VIBRATION OF ENGINE PIPELINE

Lilun

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT The paper deals with structural optimization for reducing vibration of engine pipeline. The method can give the best position, stiffness and damping of clips to be attached on condition that pipe system's structure has been given. Based on the finite element analysis of original structure, the analytical process is limited between the locations where are to be attached clips, excited points and dangerous points. It is not necessary to make again a finite element analysis for the improved system. An example for reducing the vibration of an engine pipeline is presented.

Key words Optimization Engine Pipelines Vibration