

平面叶栅跨音流动的数值计算 及变工况性能的研究*

西安交通大学 刘 仪** 刘 斌 向一敏 曹春丽

【摘要】 提出一种隐式矢通量分裂差分格式并用来直接求解 Reynolds 平均 N-S 方程组。该方法避开了近似因子分解及矩阵运算, 具有精度高、稳定性好、计算量少等优点。在平面叶栅跨音流场的计算中, 较好地捕获了激波, 与实验比较, 结果令人满意。

主题词: 叶栅 跨音流动 数值模拟

分类号: O242.1 O354.2

1 引言

叶栅流动结构极为复杂, 对叶栅流场的研究、设计应从两方面着手, 一是叶栅粘性绕流问题, 另一是叶栅内的跨音流动, 同时还要注意叶栅的变工况性能。文献 [1] 提出了一种构造隐格式的简单方法。该方法是基于时间相关的高阶小量, 通过它可以直接形成隐式光滑因子。与传统方法相比, 本方法是 Jacobian 谱半径格式且无近似因子分解。本文将它应用到 Steger-Warming 分裂格式中去, 得到一种隐式矢通量分裂格式。最后, 采用隐式矢通量分裂格式直接求解贴体坐标系下的 Reynolds 平均 N-S 方程组。使用该算法结合 Baldwin-Lomax 湍流模型数值求解跨音叶栅的粘性绕流问题, 并对该情况下的叶栅变工况性能作了一些研究。

2 基本方程组和计算方法

在任意曲线坐标系下, 二维无因次 N-S 方程组的守恒型 (参见文献 [2]) 如下:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \hat{F}_r}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}_r}{\partial \eta} \right] \quad (1)$$

在层流计算中, 粘性系数用 Sutherland 公式确定 $\mu = C_1 T^{3/2} / (T + C_2)$, k 由 $k = \mu cp / Pr$ 得到, 常数 C_1 、 C_2 、 cp 、 Pr 可由物性参数表查得。

对湍流采用 Baldwin-Lomax 的湍流模型^[3], $\mu = \mu_l + \mu_t$, $k = k_l + k_t$, 其中 μ_l 、 k_l 为层流的动力粘性系数和热传导系数, μ_t 、 k_t 为湍流的涡粘性系数和热传导系数, μ_t 由模型半经验确定, 而 $k_t = \mu_t cp / Pt$, 湍流 Prandtal 数 Pt 取为 0.9。

应用 Steger-Warming 分裂原理^[4]对矢通量 $\hat{F}$ 、 $\hat{G}$ 进行分裂, 可得:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}^+}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}^-}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}^+}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}^-}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \hat{F}_r}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}_r}{\partial \eta} \right] \quad (2)$$

亚矢通量可整理如下:

$$\hat{F}^{\pm} = \frac{L\rho}{2Y} \left[C_1, C_1 u + C_2 a \xi_x, C_1 v + C_2 a \xi_y, C_1 \frac{u^2 + v^2}{2} + C_2 a \xi_x u + C_2 a \xi_y v + c_3 \frac{a^2}{Y-1} \right]^{-1}$$

$$\hat{G}^{\pm} = \{ \hat{F}^{\pm} \mid \xi \text{ 换成 } \eta \}$$

其中: $C_1 = 2(Y-1)\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $C_2 = \lambda_3 - \lambda_4$, $C_3 = \lambda_3 + \lambda_4$

计算 $\hat{F}^+$ 时, λ_1 、 λ_2 、 λ_3 、 λ_4 用矩阵 $\partial \hat{F} / \partial \hat{U}$ 中正的特征值或零 (特征值为负时取零), 计算 $\hat{F}^-$ 时, λ_1 、 λ_2 、 λ_3 、 λ_4 用矩阵 $\partial \hat{F} / \partial \hat{U}$ 中负的特征值或零 (特征值为负时取零)。同样方法用矩阵 $\partial \hat{G} / \partial \hat{U}$ 的特征值计算 $\hat{G}^{\pm}$ 。

由无矩阵运算、无近似因子分解的隐格式构造思想^[1], 按照模型方程的推导, 再结合矢通量沿不同方向分裂的特点, 在方程组 (2) 右端添加高阶无穷小量, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}^+}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}^-}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}^+}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}^-}{\partial \eta} = & \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{F}_r}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}_r}{\partial \eta} \right) - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda_{\xi}^+ \frac{\partial \hat{U}}{\partial \xi} \right) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda_{\xi}^- \frac{\partial \hat{U}}{\partial \xi} \right) \\ & - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda_{\eta}^+ \frac{\partial \hat{U}}{\partial \eta} \right) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda_{\eta}^- \frac{\partial \hat{U}}{\partial \eta} \right) - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\lambda_{\xi} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \xi} \right) \\ & - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\lambda_{\eta} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 λ_{ξ}^+ 、 λ_{ξ}^- 、 λ_{η}^+ 、 λ_{η}^- 分别是 $\hat{F}^+$ 、 $\hat{F}^-$ 、 $\hat{G}^+$ 、 $\hat{G}^-$ 的特征值有关的标量, λ_{ξ} 、 λ_{η} 分别是 $\hat{F}_r$ 、 $\hat{G}_r$ 的特征值有关的标量。这些添加项都是与 $\partial \hat{U} / \partial \alpha$ 有关的非定常项, 对方程的定常解是没有影响的。添加的高阶小量实质上一种隐式残差平滑手段, 详见文献 [1]。

对式 (3) 差分展开, 整理可得:

$$A \delta \hat{U}_{i,j-1}^{n+1} + B \delta \hat{U}_{i,j-1}^{n+1} + C \delta \hat{U}_{i,j}^{n+1} + D \delta \hat{U}_{i,j+1}^{n+1} + E \delta \hat{U}_{i+1,j}^n = \Delta \hat{U}_{i,j}^n \quad (4)$$

为了提高精高, 在显式部分 $\Delta \hat{U}^n$ 的计算, $\hat{F}^+$ 、 $\hat{F}^-$ 、 $\hat{G}^+$ 、 $\hat{G}^-$ 采用二阶精度的单侧三点前 (后) 差, 对粘性项采用中心差分。

对式 (4) 隐式 $\delta \hat{U}^{n+1}$ 的求解, 可在 i 站上沿 η 方向用追赶法直接解, 从而提高了求解的效率, 减少了计算量。这样在格式构造中没有二阶数值耗散, 也未加入任何人工粘性, 因此该方法精度较高, 同时避免近似因子分解和繁杂的矩阵运算, 稳定性好、收敛也较快。

根据模型方程的稳定性分析及方程组的特征理论, 式中 λ 取下述各式时, 格式 (4) 是无条件收敛的:

$$\begin{aligned} \lambda_{\xi}^+ &= \max \{ \tilde{u} + a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, 0 \}, \quad \lambda_{\xi}^- = \max \{ \tilde{u} - a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, 0 \} \\ \lambda_{\eta}^+ &= \max \{ \tilde{v} + a \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}, 0 \}, \quad \lambda_{\eta}^- = \max \{ \tilde{v} - a \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}, 0 \} \\ \lambda_{\xi} &= \max \left\{ \frac{2\mu + \lambda}{Re\rho}, \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \frac{\mu Y}{Re\rho P_r}, \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \right\} \\ \lambda_{\eta} &= \max \left\{ \frac{2\mu + \lambda}{Re\rho}, \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}, \frac{\mu Y}{Re\rho P_r}, \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \right\} \end{aligned}$$

3 计算结果与讨论

用本文提出的二阶隐式矢通量分裂差分方法对北重叶栅进行了数值模拟, 其气动参数及实验数据取自文献 [5]。计算采用贴体网格, 沿流动方向取 69 个计算站, 叶道内有 35 条网格线, 并在局部加密网格, 纵向有 21 个计算站, 且沿上、下壁面用指数规律加密并在中线处光滑连接, 这样保证在近壁面第一根网格线上可用壁面函数。图 1 给出叶型表面压力分布曲

线,从图中可以看出激波分辨率高,激波捕捉位置准确,激波抹平仅一二个网格,且整体与实验数据基本吻合。

图 2 是等马赫数线分布 (图中 1 为 0.20, 2 为 0.31, 3 为 0.42, 4 为 0.53, 5 为 0.64, 6 为 0.76, 7 为 0.87, 8 为 0.98, 9 为 1.09, A 为 1.20), 为便于分析, 给出两个叶道的分布, 从中可以清楚地表明由于粘性和尾迹的作用, 在叶型表面附近及尾迹区附近是参数剧变的地方。

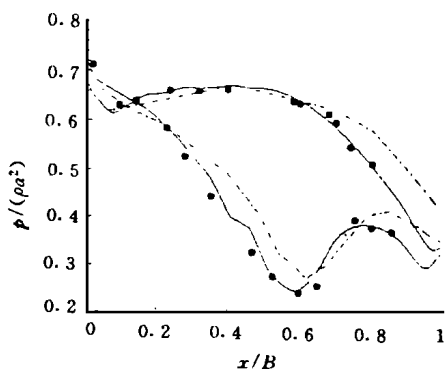


图 1 叶型表面压力分布

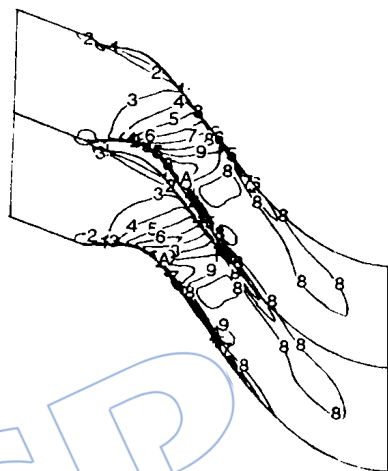
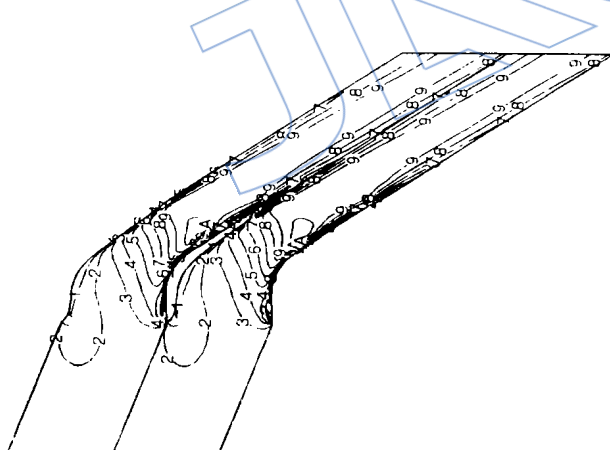
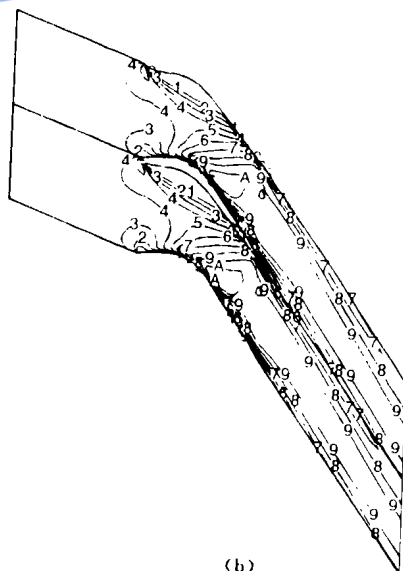


图 2 等马赫数分布

我们还对该叶栅改变进出口条件进行变工况性能的一些研究, 这里给出不同攻角的部分



(a)



(b)

图 3 不同攻角下的等马赫数分布比较 (a. 正攻角 30° ; b. 负攻角 25°)

结果。图 3 说明不同攻角对马赫数分布的影响 (图中 1 为 0.20, 2 为 0.30, 3 为 0.40, 4 为 0.50, 5 为 0.60, 6 为 0.70, 7 为 0.80, 8 为 0.90, 9 为 1.00, A 为 1.10), 比较图 2, 不管

正负攻角边界层都明显变厚,尾迹影响区域变大,损失也变大。从图 3b 看出压力面进口部分流动恶化,有明显的回流区,见图 4 速度矢量放大图(局部)。

从该算例可知,计算结果基本准确,对激波的分辨率较高,也可使用于分离计算。

4 结 论

(1) 本文提出的隐式矢通量分裂差分格式能够较准确地反映平面叶栅流动信息、更精确地捕捉激波、计算流动参数,可以推广到三维粘流场的计算。(2) 该隐式矢通量分裂格式具有精度高、稳定性好。计算量小等优点,是研究和设计平面叶栅的有力手段之一。(3) 对流场的数值结果分析,可以帮助我们细致了解叶栅的气动性能,具有快速、方便的特点。

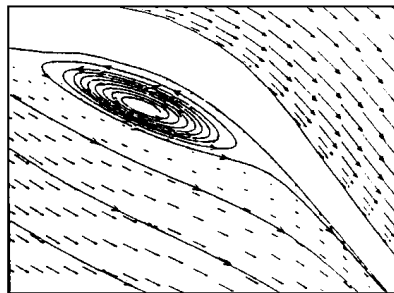


图4 速度矢量放大图

参 考 文 献

- 1 刘斌, 向一敏. 利用高阶添加项构造原参数气动方程组的差分格式. 工程热物理学报, 1994, 15 (1): 25- 30
- 2 刘仪, 潘勇, 秦光远等. 一种 NAVIER- STOKES 方程组的隐格式构造及跨音扩压器流场的数值模拟. 全国水动力学研讨会文集, 海洋出版社, 1995
- 3 Baldwin B S, Lomax H. Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows. 1978, AIAA: 78- 257
- 4 Steger J L, Warming R F. Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas- Dynamic Equation with Application to Finite Difference Methods. Journal of Computational Physics, 1981, 40: 263- 293
- 5 张耀科, 龚增锦, 沈孟育. 关于时间相关法求解平面叶栅跨音绕流的一些问题. 工程热物理学报, 1980, 1 (4): 337- 340

(责任编辑 魏星禄)