

跨音叶栅流动的多级有限元分析

清华大学 朱 刚 沈孟育 刘秋生 王保国

【摘要】 将各向异性张力有限单元和 Taylor-Galerkin 有限元法在多级有限元法的思想下结合起来, 构成了收敛速度和稳定性均较好的适用于跨音流动计算的各向异性多级有限元法。利用这一方法, 基于 Euler 方程, 研究了平面跨音速叶栅流动, 并与实验结果作了比较。结果表明, 本方法是跨音速计算的强有力手段。

主题词: 跨音速流动 叶轮机械 有限元法

分类号: O 354. 2 O 242. 21

跨音速流动目前尚缺乏成熟而有效的算法。为解决这一问题, 本文试图将广义有限元法^[1-4]和多级有限元法^[5]结合起来, 各取其优点, 并采用作者为适应叶轮机械内部流动计算而构造的各向异性张力有限元^[5]以构成新的算法。我们从 Taylor-Galerkin 有限元法^[1-3] (TGFE) 出发, 对这一方法进行多级有限元改进, 并应用各向异性有限单元。另外, 为保证算法的稳定性, 利用广义有限元的特点, 将有限体积法中处理数值粘性的新的方法^[6]引入到本方法中, 以取代原来的处理方法。

1 各向异性多级有限元法

对可压缩无粘流动, 控制方程为 Euler 方程, 可写为如下的守恒形式。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

加入状态方程

$$p = (\gamma - 1) \rho \left[e - \frac{1}{2} u_j u_j \right] \quad (2)$$

则方程组封闭。其中 γ 为绝热系数。(1) 式可写为以下形式:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

其中 $A = A(\bar{U}) = \frac{\partial F}{\partial U}$, 对 $\bar{U}$ 在 $t = t^n$ 处作 Taylor 展开, 于是我们即得到:

$$\Delta \bar{U}^n = \bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n = - \Delta t A \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial x_j} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_j} \right) \right] \Big|_n \quad (4)$$

对上式作 Taylor-Galerkin 近似, 即得离散公式。为避免 Jacobian 矩阵计算的困难, 采用两步法, 得到:

$$\bar{U}^{n+1/2} = \bar{U}^n + \frac{\Delta t}{2} \left[- \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right]_n, \quad \bar{U}^{n+1} = \bar{U}^n + \Delta t \left[- \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right]_{n+1/2}$$

作有限元离散得:

$$\int_P \bar{U}^{\bar{n}+1/2} d\Omega = \int_P \bar{U}^{\bar{n}} d\Omega - \frac{\Delta t}{2} \int_P e \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \alpha_j} \right)^{\bar{n}} d\Omega \quad (5)$$

$$\int \mathcal{Q}_\alpha \Delta \bar{U}^{\bar{n}l} d\Omega = \Delta t \int \left(F_j |^{\bar{n}e} - F_j |^{\bar{n}} - F_j |^{\bar{n}+1/2} \right) \hat{\mathcal{Q}}_\alpha d\tau + \Delta t \int \frac{\partial \mathcal{Q}_\alpha}{\partial \alpha_j} F_j |^{\bar{n}+1/2} d\Omega$$

$$\int \mathcal{Q}_\alpha \Delta \bar{U}^{\bar{n}h} d\Omega = \Delta t \int \left(F_j |^{\bar{n}} - F_j |^{\bar{n}l} - F_j |^{\bar{n}+1/2} \right) \hat{\mathcal{Q}}_\alpha d\tau + \Delta t \int \frac{\partial \mathcal{Q}_\alpha}{\partial \alpha_j} F_j |^{\bar{n}+1/2} d\Omega \quad (6)$$

对第一步, 采用“面离散”, 即 P_e 为这样的插值函数, 在每一个单元内, 它保持常值。对于第二步, 则采用“点离散”, 即以每个节点上的函数值作为自变量, 在每个单元内, 先后采用线性基函数 $\mathcal{Q}_\alpha$ 和 Hermite 插值基函数 $\mathcal{Q}_\alpha$ 进行计算, 这样实际把第二步分成了两步, 先在低阶有限元子空间内逼近得解 U_l , 然后以此为上步的值在高阶有限元子空间内求解得 U_h 。同时在第二步中, 为保证稳定性, 还加入了第一步的修正项。各解之间的插值算子和限制算子采用线性算子。这样处理是基于多级有限元的思想^[7]。多级有限元法与差分法中的多重网格法基本思想相同, 低次有限元对应于大波长, 它可以刻划解的低频分量; 高次有限元对应于小波长, 它可以刻划解的高频分量。这样, 即可大大改善解的收敛速度和提高精度。我们采用的方法, 即是吸取了这一思想, 在不同计算步上用不同阶次的有限元, 在第二步中也采用不同阶次的单元, 以提高算法的效率。

第二步中的 Hermite 插值基函数采用文献[5]构造的各向异性张力 Hermite 元。各向异性张力单元是采用张量乘积空间逼近的方法构造的, 其基函数不同于通常的代数多项式基函数, 而是采用张力样条函数的基底, 因而是代数多项式与指数多项式在满足一定泛函极小条件下的组合, 具有独特的性质, 而且在一个方向上为 Hermite 插值, 另一方向上线性插值, 交换两方向, 则既可保证各方向上的计算精度, 又减小了计算及存储量。由表达式: $N_X(i) = \alpha_{i1} + \alpha_{i2} \zeta$, $N_Y(j) = b_{1j} + b_{2j} \eta + b_{3j} e^{\sigma \eta} + b_{4j} e^{-\sigma \eta}$, 可由张量积空间逼近得:

$$N(i) = N_X(i) N_Y(j) \quad (7)$$

各个系数见文献[5]。

在跨音速计算中, 为改善数值稳定性, 我们加入了二阶与四阶相结合的人工粘性^[6]。这一处理方法是借鉴有限体积法的技巧。以往的 Euler 方程的数值方法, 对激波前的振荡很难消除, 而且收敛速度不高, 在很多情况下甚至难以收敛^[6]。对差分法、有限体积法如此, 对有限元法就更加困难。广义有限元的优点即是可以比较简便地借鉴差分法的各种处理技巧, 以达到更好的效果。因此, 采用文献[6]中对有限体积法行之有效的人工粘性处理方法, 以其思想为出发, 构造了对应于本算法的处理方法:

$$\int \mathcal{Q} \bar{U}_{ic} d\Omega = \int \mathcal{Q} \bar{U}_c d\Omega - \Delta t \int \frac{\partial \bar{U}}{\partial \alpha_j} d\Omega \quad (8)$$

其中: $D_j = h_e / \Delta t (\epsilon^{(2)} \bar{U} / \alpha_j - \epsilon^{(4)} \partial \bar{U} / \partial x_j)$, $\epsilon^{(2)} = \kappa^{(2)} \max(Y_{i+1,j}, Y_{i,j})$, $\epsilon^{(4)} = \max(0, \kappa^{(4)} - \epsilon^{(2)})$, $Y_{i,j} = |P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}| / |P_{i+1,j} + 2P_{i,j} + P_{i-1,j}|$ 。 $\kappa^{(2)}$ 和 $\kappa^{(4)}$ 的取值参照文献[7]的取法。

2 平面跨音叶栅数值结果及结论

叶栅主要参数: 入口总压 295886 N/m², 总温 288 K, 栅距 $t/L = 0.6005$, 进气角 50.4°。在计算中, 进出口区各取一个栅长。采用了 2100 个单元 (30×70), 从计算结果中 (图 1- 图 4) 可以明显看出, 在叶片出口处有一道激波, 故压力有一突越。由于前缘采用削尖处理, 故前缘处有一定误差。在计算中发现, 采用原 Taylor-Galerkin 法无法保证其收敛, 而新的算法收敛较快,

而且收敛过程中波动较小, 算法稳定性较好。

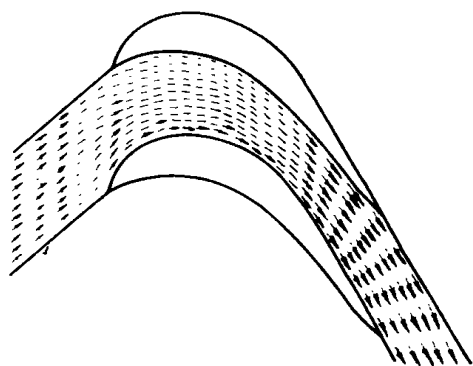


图 1 流场矢量图

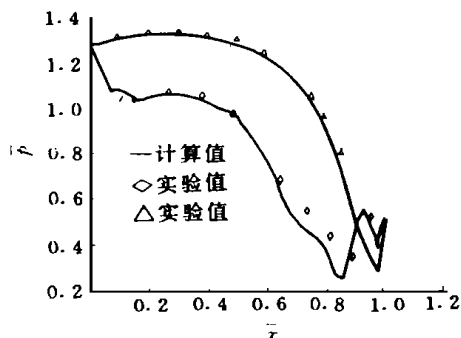


图 2 叶面压力分布和实验值

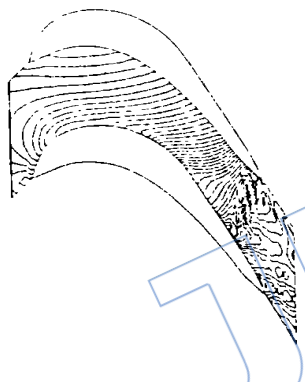


图 3 等马赫线分布

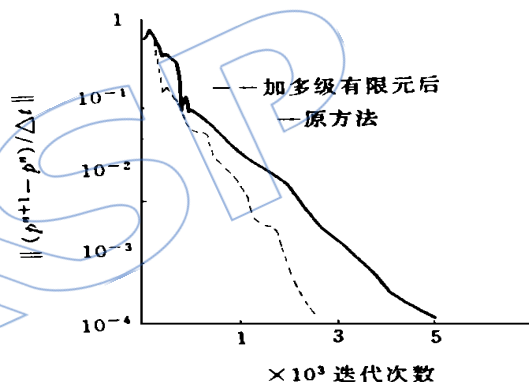


图 4 收敛曲线

由以上计算实例可以看出, 各向异性多级有限元法对于跨音叶栅计算是很有效的。有限元法的优点在于可以方便地采用非结构网格以提高前后缘和激波的分辨率, 因此, 若与非结构网格生成技术相结合, 则会获得更好的效果。进一步的工作是将本文的算法与非结构网格技术结合, 并推广至二维粘流及三维粘流跨音流场计算之中。

参 考 文 献

- 1 Donea J A. Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems Inter Jour, for Numerical Methods in Engineering, 20: 101- 119
- 2 朱刚, 谷传刚, 胡庆康. 对 Taylor-Galerkin 有限元的一点改进和它的应用. 应用数学和力学, 14: 1115- 1120
- 3 朱刚, 王少平, 沈孟育, 胡庆康. 粘性不可压流场的修正 Taylor-Galerkin 有限元法. 第七届全国计算流体力学会议论文集, 1994, 温州
- 4 徐国群, 张国富. 不可压 Navier-Stokes 方程组的 SUPG 有限元数值解. 空气动力学报, 1991, 1
- 5 朱刚, 景思睿, 胡庆康, 陈农. 各向异性张力有限单元的构造及应用. 西安交通大学学报, 1993, 27
- 6 Jameson A, Baker T J. Solution of the Euler Equations for Complex Configurations A IAA Paper, 83-1929 PP293- 302
- 7 李开泰, 黄艾香. 近似惯性流形方法和多级有限元逼近. 西安交通大学学报, 26: 51- 58

(责任编辑 魏星禄)

A MULTISTAGE FINITE ELEMENT METHOD FOR TRANSONIC FLOW CALCULATION IN TURBOMACHINERY

Zhu Gang, Shen Mengyu, Liu Qiusheng, Wang Baoguo

(Dept. of Engineering Mechanics, Tsing Hua University, Beijing, 100084)

ABSTRACT In the light of the idea of Multistage Finite Element Method, The anisotropic tensor force finite element and the Taylor- Galerkin finite element method have been combined properly into a new method which called anisotropic multistage finite element method. This method is superior in convergence speed and stability and suitable to transonic flow calculations. We applied this method to analyzing the transonic flow in a two-dimensional cascade and compared with its experimental data. It is shown that this method is a powerful tool for the transonic flow calculation.

Key words Transonic flow Turbomachines Finite element method

ANALYSIS OF FATIGUE CRACK GROWTH IN GLALL

Zhang Xueren and Nie Jingxu

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT A finite element analysis is applied to the fatigue crack growth properties in glass aluminum hybrid laminates (GLALL). The stress and strain fields of GLALL with different crack length are obtained from the computation, in which the cracks are assumed to expand only in Al layers. The relationship of the effective stress intensity factors on the crack tips to the crack length is derived by the energy method. It is found that the bridging effect of the glass fibers with high strength on the cracks in Al layers decreases obviously the effective stress intensity factors thus the growth rate of the fatigue cracks is cut down to a great extent. The computation results agree well with the experimental data.

Key words Laminates Fatigue crack Diffusion Characteristics

STRUCTURAL RELIABILITY ANALYSIS OF AN AEROENGINE WITH COMPLEX UNCERTAINTY

Wang Zhenying and Lu Wenlin

(Dept. of Aeroengine, Northwestern Polytechnical University 710072)

ABSTRACT Random material properties, geometrical shapes, forces and displacement boundary condition of an aeroengine are directly introduced into functional variational formulations and a unified random variational principle and the probabilistic finite element method with the small parameter perturbation method are provided. Based on second-order perturbation technique, the formulations for the random stresses and the reliability of the aeroengine's structures are derived. According to analysis the characteristics of these random parameters, the simple methods for analyzing the aeroengine structural reliability are obtained. At last, the reliability of a rotating disk of the aeroengine is analyzed with a simple numerical example.

Key words Aircraft engines Structural reliability Probability Finite elements