

点格式(两维情况)并缺乏主对角占优。使用逆变速度分量 $v^{[3]}$, 对流扩散通量的计算简单, 但速度与压力的耦合变得复杂, 所得的压力方程也为 9 点格式(两维情况)并缺乏主对角占优。协变速度分量 $v_i^{[4]}$ 的使用使得对流扩散通量的计算复杂化, 但速度和压力的耦合简单, 压力方程为 5 点格式(两维情况)且主对角占优。由于压力方程是整个计算的一非常重要的部分, 现基本上倾向于使用协变速度分量。由于协变(或逆变)速度分量的方向随网格的变化而变化, 动量方程中出现曲率源项, 方程的形式将十分复杂。为避免这一问题, Karki^[4]在推导其离散动量方程时采用了这样一个基本思想: 动量沿直线守恒(无附加力项)。采用的速度分量的方向不变, 则曲率源项消失, 各附加力项不出现。图 3 给出其两维示意图。对于控制体 P , 建立其协变速度分量 $v_{i(P)}$ 的动量方程时仅取其相邻各控制体在协变基矢量 $e_{i(P)}$ 上的速度分量, 图上以虚线箭头所示。Karki 绕过对微分方程进行积分的通常做法而直接由此推出离散型动量方程, 推得的离散动量方程物理意义明了, 形式简单。上述基本思想的一种数学描述由 Davidson 和 Hadberg 给出^[5], 但所推导的过程物理意义不明确, 所得公式值得商榷。在一般曲线坐标系下, 稳态不可压流的协变速度分量动量方程为:

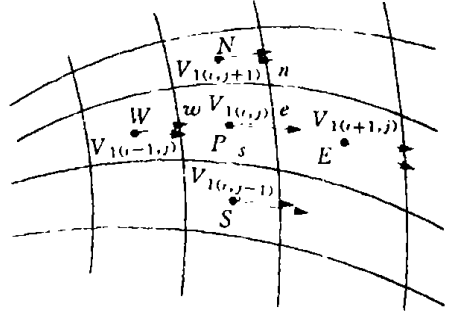


图 3 动量方程因变量的选取

式中各处的协变导数为 $v_{i,j} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x^j}$, $\left\{ \begin{matrix} k \\ i, j \end{matrix} \right\}$ 为第二类 Christoffel 符号。

利用连续方程 $(\rho v^k)_{,k} = 0$ 并将逆变速度分量 v^k 的指数下降, 得到式(1)协变速度的守恒型动量方程:

$$(\rho g^{jk} v_j v_i - \mu g^{jk} v_{i,j})_{,k} = - p_{,i} \quad (2)$$

将式(2)左右同乘倒易基矢量 e^i , 在控制体 V 内积分, 由高斯公式给出:

$$\int_A (\rho g^{jk} v_j v_i - \mu g^{jk} v_{i,j}) n_k e^i dA = - \int_A n_i e^i dA \quad (3)$$

上式中 A 为封闭控制体 V 的封闭曲面。速度物理量可由不同的分量表达: $v = v_i e^i = v_i^* e_{i(P)}$ 。其中 $e_{i(P)}$ 为某点的协变基矢量。协变速度 v_i 的方向会发生变化, 而 v_i^* 的方向将保持不变。

公式(3)左边被积函数可变为:

$$(\rho g^{jk} v_j v_i - \mu g^{jk} v_{i,j}) n_k e^i = (\rho g^{jk} v_j v_i e^i - \mu g^{jk} v_{i,j} e^i) n_k = [\rho g^{jk} v_j v_i^* - \mu g^{jk} (\partial_i^* / \partial x^j)] n_k e_{i(P)}$$

公式(3)由此变为:

$$\int_A \left(\rho g^{jk} v_j v_i^* - \mu g^{jk} \frac{\partial v_i^*}{\partial x^j} \right) n_k e_{i(P)} dA = - \int_A n_i e^i dA \quad (4)$$

由于 $e_{i(P)}$ 是一不变量, 可得式(4)的另一表达式:

$$\int_A \left(\rho g^{jk} v_j v_i^* - \mu g^{jk} \frac{\partial v_i^*}{\partial x^j} \right) n_k dA = - \int_A n_i (e^i \cdot e_{i(P)}) dA \quad (5)$$

公式(5)与 Davidson 和 Hadberg 所推的公式相比多了右面一项 $(e^i \cdot e_{i(P)})$ 。 $(e^i \cdot e_{i(P)})$ 代表曲线坐标的弯曲程度, 对于直线坐标 $(e^i \cdot e_{i(P)}) = 1$ 。对于弯曲程度不高的曲线坐标, 在某控制体的周围小邻域内 $(e^i \cdot e_{i(P)}) \approx 1$ 。从此可认为 Davidson 和 Hadberg 所推的公式仅是(5)式的一近似表达式。导致该近似的原因在于 Davidson 和 Hadberg 假定在控制体 P 的周围邻域内 e_i 不

变, 皆为 $e_i(p)$ 。公式(5)化为以 v_i^* 为因变量的动量方程。公式(5)与公式(3)相比得到简化, 简化的原因是 Cristoffel 符号的消失, 即曲率源项或各种附加力的消失。对于三维情况, Cristoffel 符号有 18 个独立项, 它的存在使得数值计算上对计算机内存和计算量的要求都大为增加, 且计算准确度将有所下降。而公式(5)则便于进行数值计算。

一般曲线坐标系下的能量方程为 $(\rho c_p g^{ij} v_j T)_{,i} = (g^{ij} k T_{,j})_{,i} + 2\mu S^{ij} S_{ij}$ 。在离散动量和能量方程过程中, 压力和温度等标量函数存于主控制容积, 速度则分别存在其各自的交错控制容积上。动量方程的具体离散参考文献[4]的基本做法。动量方程和能量方程离散后的形式为:

$$a_p \Phi_p = \sum a_{NB} \Phi_{NB} + b \quad (6)$$

速度和压力的耦合利用 SIMPLER 的基本思想得以实现, 得到的压力和压力校对方程在形式上与方程(6)完全一样。计算域内主控制容积的划分见图 2, 域内金属叶片部分由设定 $\mu \gg 1.0$, $k = k_{\text{金属}}$ 来满足, 且利用调和平均来计算气—固界面的导热系数。以两维情况为例(见图 3), 若 P 控制体 e 面的左右具有不同的物性, 则 e 面的调和平均导热系数表示为:

$$k_e = (1/k_e^+ + 1/k_e^-)^{-1} \quad (7)$$

其中 $k_e^+ = \sqrt{g_e g_e^{11} k_E \Delta x_e^2 / \Delta x_e^{1+}}$, $k_e^- = \sqrt{g_e g_e^{11} k_P \Delta x_e^2 / \Delta x_e^{1-}}$, 其中 Δx_e^{1+} 为由 e 面到 E 点 x^1 的变化, Δx_e^{1-} 为由 P 点到 e 面 x^1 的变化。其它各面调和平均导热系数与式(7)类似。上面所列离散方程组用 ADI 迭代求解。

2 计算结果

在计算中, 对于温度边界条件的处理, 对剖面 $A-B$, $C-D$ (参见图 1) 取为绝热, $B-N1$ 面, $N2-N3$ 面, $N4-N5$ 面, $N6-N7$ 面, $N8-N9$ 面和 $N10-C$ 面均取为第三类边界条件: 高温燃气温度取为 1500°C , 外换热系数取一典型值: $4000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$; 面 $A-E$ 和 $F-D$ 取为第一类边界条件: 温度为进口冷气温度 $T_c = 500^\circ\text{C}$ 。进口流速为: $(g_{jj})^{1/2} g^{ij} v_j = -U(j)$, 此处不对下标 j 求和, $U(1) = U_0$, $U(2) = 0$ 。出口各处速度分量和温度均用 $\Phi_i = 0$ 的条件(不对 i 求和, i 取值为 2)。对于涡轮工作叶片, 其叶背和叶盆的压力不同, 但由于缺乏有关的数据, 在本计算中任取值为: 前段三气膜孔的出口压力为 $p_0 = 1.45 \times 10^6 \text{ (Pa)}$, $N1-N2$ 出口的压力为 $p_0 = 1.4 \times 10^6 \text{ (Pa)}$, 而 $N9-N10$ 的压力为 $p_0 = 1.43 \times 10^6 \text{ (Pa)}$ 。应注意的是背压的不同选取将改变流动状态, 改变各出口的流量分配及温度的分布, 从而准确的计算需要真实的压力分布。计算中, $k_{\text{金属}} = 150 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ 。

图 4 给出 $U_0 = 85 \text{ m/s}$ 时的流场矢量图。冷气高速冲入叶片前缘腔, 一部分冷气直接由前段三个气膜孔排出, 其余的冷气分两路折回从叶盆和叶背的出口流出, 并在内腔左右各产生一旋涡。在所给的出口压力条件下, 冷气主要由前端三个气膜孔排出。对于真实涡轮工作叶片, 因 $N1-N2$ 和 $N9-N10$ 出口的压力要有更大程度的降低, 由其流出的冷气将有不同程度的增加。由计算得出, 在所给边界条件下, 通过此叶片前腔的压力降为 $5.1 \times 10^5 \text{ (Pa)}$ 。图 5 给出叶片外表面的温度分布, 图中的横坐标是沿外表面距前端点 N 的距离, $N \rightarrow N2$ 为负, $N \rightarrow N10$ 为正。在设定的第三类温度边界条件下, 叶片外表面前端温度处于比较高的水平, 平均值为 1328.7°C , 最大温差为 5.0°C 。叶背和叶盆外表面的温度在经过一极大值后均降到较低的水平: 叶背的最小值为 1285.88°C , 叶盆的最低温度为 1282.38°C 。叶背的平均温度为 1326.8°C , 最大温差为 66.7°C , 而叶盆的平均温度为 1303.6°C , 最大温差为 35.8°C 。与叶背和叶盆温度

相比, 前端外表面的温度是比较高的, 造成这种现象的原因是叶盆和叶背所开的 KJ 和 HG 气

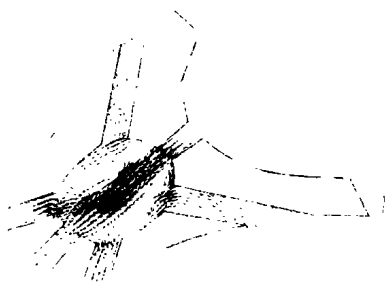


图 4 叶片内冷速度相关矢量图

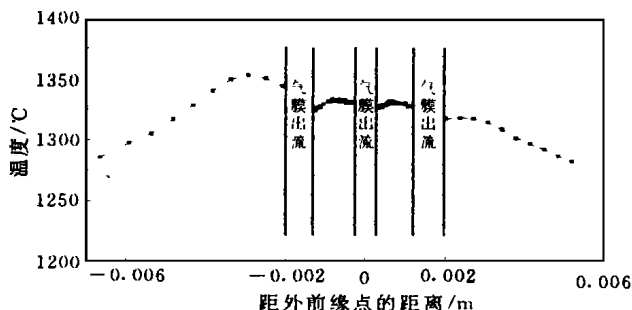


图 5 叶片外表面的温度分布

膜孔。由于这两个气膜孔的存在, 而且孔道又较长, 冷气得以对叶背和叶盆进行较充分的冷却, 使得它们的温度总体水平有所下降。而叶片的前端, 尽管受到冷气的直接冲击, 换热系数比较大, 但由于

气膜通道短, 其总的冷却效果反而较低。图 6 给出叶片内表面的温度分布, 其横坐标是沿内表面距前缘点 O 的距离, $O \rightarrow L$ 为负, $O \rightarrow M$ 为正。从图上可以看出叶片内表面的温度分布形状与外表面基本相似, 温度水平有所降低。叶背内表面的平均温度为 $1310\text{ }^{\circ}\text{C}$, 叶盆内表面的平均温度为 $1283\text{ }^{\circ}\text{C}$, 叶片前端内表面的平均温度是 $1291\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。对于真实发动机工作叶片的冷却, 冷气的进口压力和流速将远超过本文所采用的数值, 真实叶片的冷却效果将远大于以上所得的结果。

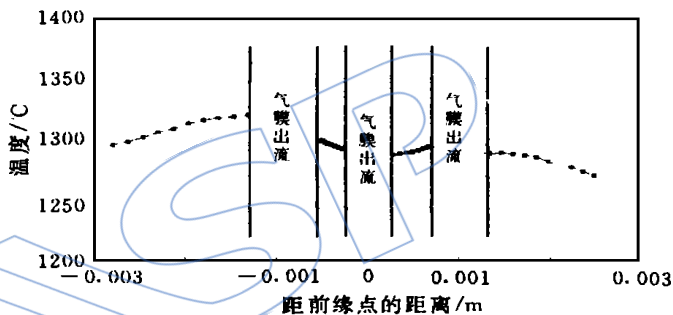


图 6 叶片内表面的温度分布

气膜通道短, 其总的冷却效果反而较低。图 6 给出叶片内表面的温度分布, 其横坐标是沿内表面距前缘点 O 的距离, $O \rightarrow L$ 为负, $O \rightarrow M$ 为正。从图上可以看出叶片内表面的温度分布形状与外表面基本相似, 温度水平有所降低。叶背内表面的平均温度为 $1310\text{ }^{\circ}\text{C}$, 叶盆内表面的平均温度为 $1283\text{ }^{\circ}\text{C}$, 叶片前端内表面的平均温度是 $1291\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。对于真实发动机工作叶片的冷却, 冷气的进口压力和流速将远超过本文所采用的数值, 真实叶片的冷却效果将远大于以上所得的结果。

结论 导出 Karki 推导离散动量方程方法所对应的数学表达式, 消除了一般曲线坐标系下协变速度分量动量方程所具有的各附加力项。在此基础上, 结合能量方程用 S M P L E R 算法对带有气膜出流的内冲击复合冷却叶片进行了共轭传热计算, 揭示了其流动的特征, 给出了叶片内外表面的温度分布。

参 考 文 献

- 1 Shyy W, Tong S S, Correa S M. Numerical Recirculating Flow Calculation Using a Body-Fitted Coordinate System. Numerical Heat Transfer, 1985, 8: 99- 113
- 2 Maliska C R, Raithby G D. A Method for Computing Three-Dimensional Flows Using Nonorthogonal Boundary-Fitted Coordinates. Int Journal for Numerical Methods in Fluids, 1984, 4: 519- 537
- 3 Domirdzic I, Gosman A D, Issa R I A. Finite-Volume Method for the Prediction of Turbulent Flow in Arbitrary Geometries. Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, 1980, 141: 144- 150
- 4 Karki K C. A Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Complex Geometries. PhD Thesis, University of Minnesota, USA, 1986
- 5 Davidson L, Hedberg P. Mathematical Derivation of a Finite Volume Formulation for Laminar Flow in Complex Geometries. Int. J. Numerical Methods in Fluids, 1989, 9: 531- 540