

燃气轮机叶轮非线性瞬态温度场的边界元分析

华东船舶工业学院 姚寿广^{* *}

【摘要】 首先采用克希荷夫变换将包含变物性及混合和辐射边界条件的热扩散方程转换成线性方程,进一步由加权余量法和离散化将方程转变成边界元方程组。用所开发的二维线性—非线性瞬态温度场边界元程序分析计算了燃气轮机叶轮起动工况下的非稳态温度场,与有限元数值计算结果比较表明,边界元法应用于这类非线性工程问题的分析是可靠、初始精度高、数值稳定性好及计算输入数据简单等优点。

主题词: 燃气轮机 温度场 边界元法

分类号: V235.1 TK472.5

1 边界积分方程及数值公式

考虑如下二维无内热源,具有随温度变化导热系数 k 的热扩散方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \rho c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

方程 (1) 的相应线性边界条件是:

第一类边界条件: $T(x, y, t) = \bar{T}(x, y, t) \quad \in \Gamma_1 \quad (2)$

第二类边界条件: $-k \cdot \partial T / \partial n = \bar{q}(x, y, t) \quad \in \Gamma_2 \quad (3)$

第三类边界条件: $-k \cdot \partial T / \partial n = \alpha(T - T_f) \quad \in \Gamma_3 \quad (4)$

当非线性辐射边界条件存在时,此时式 (4) 成为:

$$k \cdot \partial T / \partial n = -\alpha(T - T_f) - \sigma\epsilon(T^4 - T_f^4) \quad \in \Gamma_3 \quad (5)$$

式中, T 、 q 、 α 和 k 都是时间和空间的函数,且满足 $\alpha \geq 0$, Γ_1 、 Γ_2 和 Γ_3 分别是相应三类边界条件对应的边界域,且 $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ 构成区域的完整边界。

初始边界条件为: $T(x, y, t) = T_0(x, y, 0) \quad \in \Omega \quad \text{at } t = 0 \quad (6)$

采用克氏变换转换以上方程^[1],现定义一个新的变量 $u = k(T) = \int k(T) dT$ 。则得到热扩散控制方程:

$$a \cdot \nabla^2 u = \partial u / \partial t \quad (7)$$

相应变换后的边界条件为: $u = \bar{u} = \int k(T) dT \quad \in \Gamma_1 \quad (8)$

$$\partial u / \partial n = -\bar{q} \quad \in \Gamma_2 \quad (9)$$

$$\partial u / \partial n = -\alpha[k^{-1}(u) - T_f] \quad \in \Gamma_3 \quad (10)$$

这里 k^{-1} 是克氏变换的逆变换, 以上诸式中式 (8)、式 (9) 仍为线性关联式, 而式 (10) 则为具有弱非线性的关联式。

若考虑辐射边界条件, 则得到如下具有强非线性的复杂关联式:

$$\partial u / \partial n = -\alpha[k^{-1}(u) - T_f] - \epsilon\sigma[k^{-1}(u)^4 - T_s^4] \quad \in \Gamma_3 \quad (11)$$

初始边界条件为: $u = u_0 = \int_0^t k(T) dT \quad \in \Omega \quad t = 0$

对式 (7) - 式 (10) 应用加权余量法得^[1]:

$$\begin{aligned} c_i u_i + \int_0^t \int_{\Gamma_2} a u q^* d\Gamma d\tau + \int_3 \int_0^t a \alpha k^{-1}(u) d\Gamma d\tau \\ = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \int_0^t a q u^* d\Gamma d\tau + \int_3 \int_0^t a \alpha T_f u^* d\Gamma d\tau + \int_{\Omega} u^0 u^* d\Omega \end{aligned} \quad (12)$$

这里 t_0 是初始时刻, t_i 为终了时刻, u^* 是问题 (7) 的时间相关基本解, q^* 是 u^* 在边界 Γ 上的法向导数^[2]。

引入辐射边界条件式 (11), 则方程 (12) 可改写成下式:

$$\begin{aligned} c_i u_i + \int_0^t \int_{\Gamma_2} a u q^* d\Gamma d\tau + \int_3 \int_0^t a \alpha k^{-1}(u) u^* d\Gamma d\tau + \int_3 \int_0^t a \sigma \epsilon [k^{-1}(u)]^4 u^* d\Gamma d\tau \\ = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \int_0^t a q u^* d\Gamma d\tau + \int_3 \int_0^t a \alpha T_f u^* d\Gamma d\tau + \int_3 \int_0^t a \sigma \epsilon T_s^4 u^* d\Gamma d\tau + \int_{\Omega} u^0 u^* d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

假设函数 u 、 q 在时间域上离散后, 每步长内保持常数, 则方程 (12) 和 (13) 中的时间项积分可解析得到:

$$u^* = \int_0^t u^* d\tau = E_i(b) / 4\pi a, \quad q^* = \int_0^t \frac{\partial u^*}{\partial n} d\tau = -\frac{d}{2\pi a r^2} \exp(-b) \quad (14)$$

其中 $b = r^2 / 4a\Delta t$, $E_i(b) = -0.577216 - \ln[b] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{b^n}{n \cdot n!}$

假设 $q = \alpha T_f \in \Gamma_3$ ^[3], 且注意到:

$$\int_3 a \alpha k^{-1}(u) u^* d\Gamma = \int_3 a \alpha u u^* d\Gamma - \left\{ \int_3 \alpha u u^* d\Gamma - \int_3 \alpha k^{-1}(u) u^* d\Gamma \right\}$$

则式 (12) 和式 (14) 写成如下通用边界积分方程表达式:

$$\begin{aligned} c_i u_i + \int \alpha (q_i^* + \alpha u_i^*) = \int a q u^* d\Gamma + \int_{\Omega} u^0 u^* d\Omega + \left\{ \int_3 a \alpha [u - k^{-1}(u)] u^* d\Gamma \right\} \\ + \left\{ \int_3 a \sigma \epsilon [T_s^4 - (k^{-1}(u))^4] u^* d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

其中包含辐射边界条件时, 存在右端最后一项, 否则无右端最后一项。

对空间域采用线性插值^[3], 将域边界离散成 N 个线性单元, 则方程 (15) 可离散形成如下边界元方程组:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j + \sum_{k=1}^{4M} D_{ik} u_k^0 + \sum_{l=1}^{N_3} P_{il} \quad (16)$$

其中 M 为区域单元划分数目, N_3 为第三类边界条件所在边界 Γ_3 上单元划分数目, 式中

$$H_{ij} = \begin{cases} c_i \delta_{ij} + (h_{ij}^{(2)} - 1 + h_{ij}^{(1)}) & \in \Gamma_1 + \Gamma_2 \\ c_i \delta_{ij} + (h_{ij}^{(2)} - 1 + \alpha g_{ij}^{(2)} - 1) + (h_{ij}^{(1)} + \alpha g_{ij}^{(1)}) & \in \Gamma \end{cases}$$

$$G_{ij} = g_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(2)} \in \Gamma$$

$$P_{il} = \begin{cases} \int_{\Gamma} a \alpha [u - k^{-1}(a)] u_i^* d\Gamma & \in \Gamma_3 \text{ (混合边界条件)} \\ \int_{\Gamma} a \alpha [u - k^{-1}(u)] u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma} a \sigma \epsilon \{ T_s^4 - [k^{-1}(u)]^4 \} u_i^* d\Gamma & \in \Gamma_3 \text{ (包含辐射边界条件)} \end{cases}$$

$$D_{ik} u_k^0 = \int_{\partial n} N_k u_k^0 u^* d\Omega$$

且
$$h_{ij}^{(e)} = a \int_{\Gamma} \Phi q_i^* d\Gamma, \quad g_{ij}^{(e)} = a \int_{\Gamma} \Phi u_i^* d\Gamma \quad (e = 1, 2)$$

这里 Φ 是空间线性插值函数, $\Phi = (1 - \xi) / 2$; $\Phi = (1 + \xi) / 2$

方程 (16) 可进一步写成如下迭代矩阵方程式

$$[A] \{X\} = \{F_0\} + \{F_n\} \quad (17)$$

方程组 (17) 中 $\{F_n\}$ 项如不包含辐射边界条件时, 可由简单迭代法进行求解, 如若包括辐射边界条件, 则须由 Newton-Raphson 迭代法进行求解。

2 燃气轮机叶轮温度场的数值分析

运用以上分析推导得到的边界元数值公式, 作者开发成功用于二维线性与非线性瞬态温度场问题的数值分析程序, 两个数值算例曾用来验证软件的可靠性^[4]。

本文采用开发的非线性瞬态温度场分析程序计算了叶轮机纵树形榫头的非线性瞬态温度场, 该例取自文献[5], 计算中边界离散共 107 个线性单元, 内部离散为 116 个单元, 其离散模型见图 1。

计算中不同边界条件组之间构成的角点问题的处理见文献[6], 两均质分区物体表面之间的接触问题, 采用文献[7]中作者提出的方法进行处理, 为便于与有限元法计算结果进行比较, 采用边界元法对榫头进行计算时, 其边界条件沿用文献[5]中给出的计算公式及边界条件, 边界元法的计算结果见图 2, 所得结果与文献[5]中的 FEM 计算结果进行了比较。从计算中看出: 与 FEM 等其它数值方法相比, 由于在瞬态问题的分析中边界元法引入了含有全部时间影响因素的基本解, 因此数值计算中克服了其它数值方法中时间域采用有限差分法所带来的数值不稳定现象以及对初始精度的影响, 边界元分析中即使采用较大的时间步长也能保持有较好的计算精度; 边界元计算中边界离散仅有 107 个线性单位、107 个求解自由度, 而内部划分的单元不增加任何自由度, 且粗划单元对计算精度无明显影响, 这一点在文献[2]也得到证实, 如采用等时间步长计算时, 由物体几何结构决定的系数阵元素只需进行一次计算, 使得后续每一步长的计算仅在边界上进行, 而文献[5]中相同问题的有限元计算共需 323 个三角形单元, 求解自由度为 205 个, 且每一时间步长的反复计算都得在全域内进行, 显然边界元法计算输入数据量为减少, 且计算效率高; 进一步由于边界元法具有

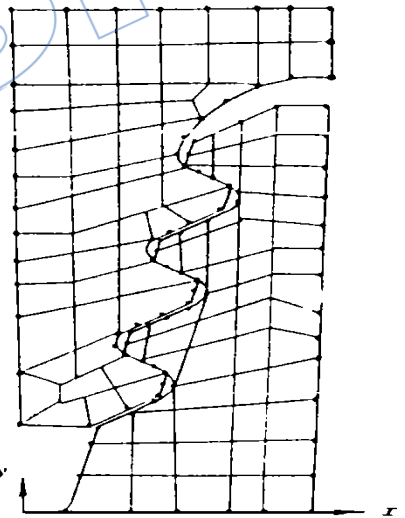


图 1 叶轮榫头的边界元离散模型

时间步长也能保持有较好的计算精度; 边界元计算中边界离散仅有 107 个线性单位、107 个求解自由度, 而内部划分的单元不增加任何自由度, 且粗划单元对计算精度无明显影响, 这一点在文献[2]也得到证实, 如采用等时间步长计算时, 由物体几何结构决定的系数阵元素只需进行一次计算, 使得后续每一步长的计算仅在边界上进行, 而文献[5]中相同问题的有限元计算共需 323 个三角形单元, 求解自由度为 205 个, 且每一时间步长的反复计算都得在全域内进行, 显然边界元法计算输入数据量为减少, 且计算效率高; 进一步由于边界元法具有

解析和离散相结合的特点, 离散误差仅在边界上, 因此拥有较高的精度, 计算结果可看出, 在相同的计算边界条件下, 边界元法在离散求解自由度很少的情况下, 其计算结果与有限元的计算结果十分吻合。

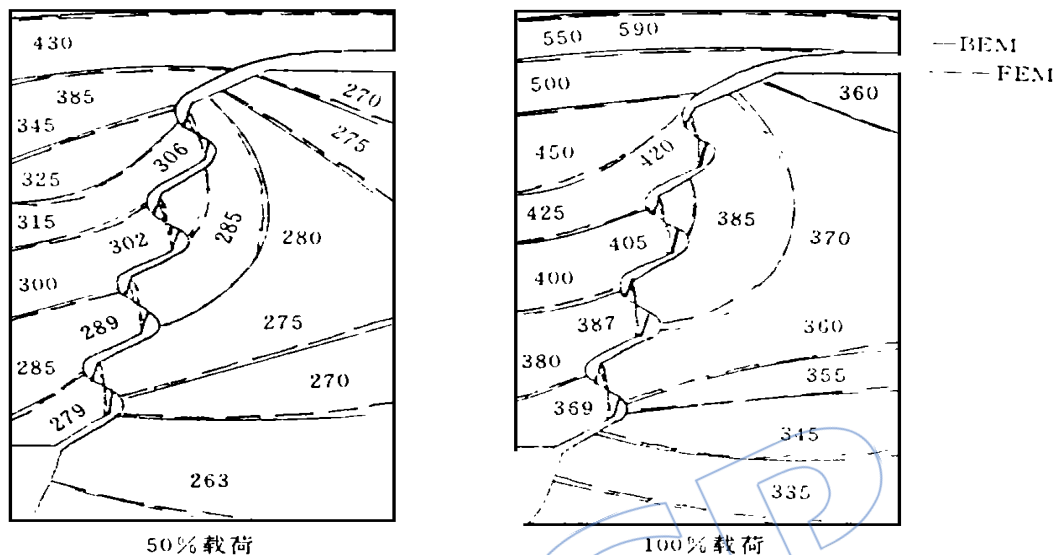


图 2 叶轮榫头温度历程计算结果比较

本文的计算分析表明 BEM 应用于这类工程问题的分析是可靠的, 与 FEM 等其它数值方法相比具有初始精度高、数值稳定性好、计算输入数据简单和省时方便等突出优点。

3 结 论

BEM 作为一种新发展起来的数值分析方法, 在许多工程领域已成为一种可替代其它数值分析方法的重要数值工具, 在诸如燃气轮机零部件热问题的分析中, BEM 与 FEM 相比具有精度高、数值稳定性好、使用方便且效率高等突出优点, 目前 BEM 应用于瞬态热问题分析的一个有待解决的问题是实现真正的仅边界离散, 从而使边界元法的优越性充分体现出来。

参 考 文 献

- 1 Brebbia C A, Telles J, Wroble L. Boundary Element Techniques- Theory and Applications in Engineering. Springer - Verlag, Berlin, NY, 1984
- 2 姚寿广等. 采用时间相关边界元法分析柴油机缸盖鼻梁区非稳定温度场. 内燃机学报, 1994, 12 (4)
- 3 姚寿广. 边界元数值方法及其工程应用. 国防工业出版社, 1995
- 4 Yao Shouguang. Analysis of Nonlinear Transient Temperature Field of a Gas Turbine Disc with BEM. Proceedings of I-SCOPE 95: Shanghai, 1995
- 5 葛永乐等. 涡轮机高温零部件温度场专题文集. 国防工业出版社, Vol3、14, 1984
- 6 姚寿广. 边界元法中角点处理的一种新方法. 镇江船舶学院学报, 1992, 6 (4)
- 7 姚寿广. 柴油机缸盖鼻梁区分区二次等参边界元分析. 镇江船舶学院学报, 1990, 4 (4)