

循环对称结构特征值问题的复数域子空间迭代法*

西北工业大学 刘恩泽** 赵宁 刘更

【摘要】 提出求解在循环对称结构固有特性问题的研究中出现的复 Hermite 阵特征值问题的复数域子空间迭代法。根据 Thomas 等人提出的理论,生成循环对称结构任一子结构的复约束质量阵和复约束刚度阵。根据本文提出的办法,生成一个包含 q 个相互质量正交归一的复向量组成的初始里兹迭代复向量组,并将原广义特征值问题的求解空间投影到由这 q 个复向量张成的 Krylov 空间上可很方便地在 q 维 Krylov 空间上进行广义复 Hermite 矩阵特征值问题的求解。

主题词: 循环对称结构 特征值问题 迭代法

分类号: O175.9 O2416

1 循环对称结构

如图 1 所示, $\varphi = 2\pi/N$, N 是结构包含的子结构数, m 是任意小于 N 的正整数。汽轮机、水轮机、航空发动机等重要部件的叶片—轮盘结构、齿轮等均属于循环对称结构。循环对称结构的几何及物理性质的周期性决定了该结构在具有周向周期分布的约束条件下,其振动模态在与旋转轴垂直的平面内必然具有周向周期性。所以,在某一模态下,由于要满足模态的周向周期性,相邻的子结构间存在固定的相位滞后 μ 。根据驻波理论,要保持结构模态的稳定和其上各点运动的连续性,相位滞后应满足如下关系:

$$N\mu = 2K\pi, \quad \mu = 2K\pi/N \quad (1)$$

由图 1 可以看出: μ 的取值是 $(-\pi, \pi]$,但实际上 $(-\pi, 0)$ 上的取值与 $[0, \pi]$ 上的取值存在对应关系:它们描述了相同的振型,只是模态旋转方向相反而已,故而实际计算时,相位滞后 μ 按如下方式选取:

N 为偶数时: $\mu = 0, 2\pi/N, \dots, 2\pi(N/2 - 1)/N, \pi$

N 为奇数时: $\mu = 0, 2\pi/N, \dots, \pi(N - 1)/N \quad (2)$

N 为偶数时,相位滞后 μ 取 $N/2 + 1$ 个值; N 为奇数时,相位滞后 μ 取 $(N + 1)/2$ 个值。

根据不同的相位滞后 μ ,对无约束子结构的质量阵和刚度阵施以不同的复约束^[1],再对这些生成的复 Hermite 矩阵进行广义特征值问题的求解就得到相应于这个相位滞后 μ 的特征值

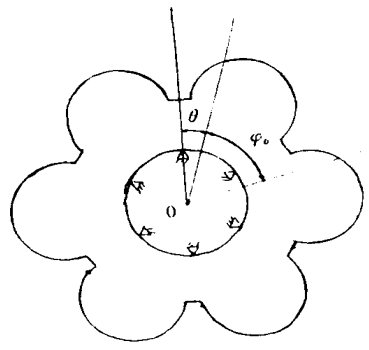


图 1 一个典型的循环对称结构

和特征向量。复约束法^[2]的实质就是利用求解对象的几何、物理性质及约束条件分布的周期性等性质,把对整个结构的求解转化到对其中任一指定的具有完全代表性的子结构的求解,即从原来 $N \cdot J$ 维的实空间上特征值问题的求解转化到 J 维复空间上复 Hermite 阵特征值问题的求解,从而使计算模型得以简化。其中 J 是单一子结构上自由度数目。

从复约束法可以看出:对应于每一个相位滞后 μ ,仅有前两三个固有频率才具有实际工程意义。以本文算例为例,当固有频率阶数大于 4 时,固有频率一般都在 10^5 数量级以上,这些高阶固有频率在结构受激振动时,如果激振频率远离共振频率时,其贡献往往可以忽略。所以,在根据某一相位滞后求出复约束质量阵和复约束刚度阵之后,没有必要求解出该相位滞后 μ 下的所有特征值和特征向量,为此,提出了复数域子空间迭代法。

2 复数域子空间迭代法中初始里兹复向量组的生成

复数域子空间迭代法的第 1 步就是要产生一个初始里兹迭代复向量组。本算法的运算在复数域进行,这与通常的子空间迭代有几点重要差别:(1)在复数域子空间迭代法中,不是一次形成 q 个向量组成的里兹初始迭代向量组,而是首先采取随机数产生办法,通过质量正交归一处理,求出 q 个向量的第 1 个向量。第 1 个迭代向量用随机数产生是为了避免由于假设模态的对称(或非对称)性对真实模态的非对称(或对称)性的抑制作用降低求解效率。(2)在产生出 q 个初始迭代向量组中第 1 个里兹复向量之后,以该复向量为一基,产生出其它复向量,且满足该新复向量与在其之前产生的里兹初始迭代向量满足质量正交归一关系。(3)在生成了 q 个初始里兹复向量组中的某个复向量之后,为了使下一个待求复向量能更加精确地逼近下一阶模态,本文采用了迭代法的方法。实践表明:这一步虽然需耗费一些机时,但它能明显提高里兹向量组对各阶模态振型模拟的逼真程度,提高求解效率和精度。

3 复数域子空间迭代法、收敛准则及算法讨论

根据瑞利法求解固有频率的方法,假设一个任意向量,将其看作各阶振型的线性组合,即

$\{A\} = \sum_{i=1}^n C_i \{\Phi^{(i)}\}$, 将瑞利商值^[3]应在各阶模态处取得的驻值代入 $\{A\}$ 的表达式,有

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \left(\sum_{i=1}^n C_i^2 \tilde{K}_i \setminus \sum_{i=1}^n C_i^2 \tilde{M}_i \right) = \frac{\partial}{\partial C_i} \left(\sum_{i=1}^n C_i^2 \tilde{M}_i \omega^2 \setminus \sum_{i=1}^n C_i^2 \tilde{M}_i \right) = 0 \quad (3)$$

写成矩阵型式,由 (3) 可得

$$[\tilde{K}]\{C\} - \frac{\{C\}^H [\tilde{K}]\{C\}}{\{C\}^H [\tilde{M}]\{C\}} [\tilde{M}]\{C\} = 0 \quad (4)$$

式 (4) 是广义特征值问题。但须注意:文中由于对每个子结构引入复约束, $[\tilde{K}]$ 、 $[\tilde{M}]$ 均为复约束 Hermite 阵^[2],所以,子空间迭代仅能在复数域完成。收敛准则采用 Matties 提出的准则^[4]:

$$|1 - [(\lambda_m)^2] / [\{Z_m\}^H \{Z_m\}]| \leq \epsilon \quad (5)$$

式中 $m = 1, 2, \dots, q$; 一般 $q \ll J$ 。本准则是由特征对的误差边界导出的,所以是可靠的。

4 计算实例及比较

为验证本方法及程序的正确性和有效性,根据圆盘的一个基本扇形子结构计算了圆盘结构的低阶固有频率和振型。为了便于比较,计算模型与文献 [2] 相同。圆盘参数为:内径 R_i 为 5 mm,外径 R_o 为 45 mm,板厚 $h = 15$ mm,材料的弹性模量 $E = 210$ GPa,泊桑比 $\mu = 0.3$,

质量密度 $\rho=7850\text{ kg/m}^3$ 。取整个圆盘的 $1/36$ 为一基本扇形子结构, 径向分 5 层, 周向、轴向 3 层。

运用 3 种不同方法计算了圆盘结构的前 7 阶固有频率, 计算结果见表 1。

表 1 圆盘结构的固有频率 (Hz)

方 法	1	2	3	4	5	6	7
拟波前法	3793.9	5285.7	7022.9	9271.0	15261.7	19243.5	27731.5
复约束法	3752.1	5241.8	7024.8	9256.2	15223.0	19184.2	27643.9
复数域子空间迭代法	3782.6	5265.8	7000.6	9241.4	15213.0	19182.0	27643.1
K -谐波索引号 ($\mu=K\theta$)	0	1	0	2	1	3	2
复数域子空间迭代与拟波前法之间相对误差	0.299%	0.378%	0.319%	0.320%	0.320%	0.321%	0.320%
复约束法与拟波前法之间相对误差	1.102%	0.376%	0.021%	0.160%	0.254%	0.308%	0.316%

一般复约束法对应于每个相位滞后 μ 需要求解出全部 J 对特征值和特征向量。拟波前法是根据文献 [6] 中的方法和程序求解完整圆盘的前 7 阶特征对, 模型结点数为 1080, 单元数为 576。从表 1 可以看出: 本文提出的复数域子空间迭代法具有满意的计算精度。

图 2 给出了固有频率在不同波传系数下的分布图。当 $K=-1,-2\cdots$ 时, 按 Thomas 的理论, 分别与 $K=1,2\cdots$ 对应相同的频率。即图 2 是关于水平轴 $K=0$ 呈轴对称的。

图 3 给出了根据某一基本扇形结构获得的完整圆盘的前四阶固有振型, 它们分别是: 圆盘的扭振、一节径振动、伞形振动和二节径振动。

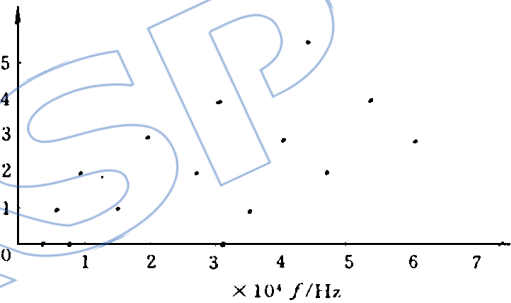


图 2 固有频率在不同相位滞后下的分布图

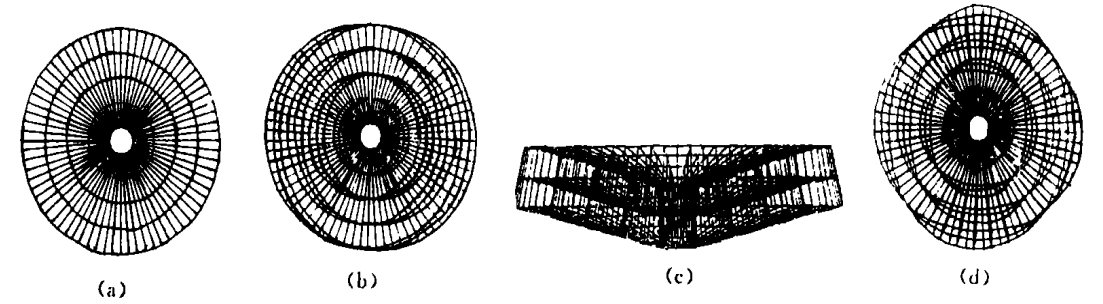


图 3 圆盘前 4 阶振型图

在文献 [2] 中, 已进行了拟波前法和复约束法在计算时间和计算内存的比较, 本文仅进行复数域子空间迭代法与复约束法的计算时间及计算内存的分析。在复数域子空间迭代法中, 时间主要耗费在 $[K_p]\{X\}=\{Y\}$ 的求解上, 其余过程相对而言, 计算时间可以忽略。在求解该方程时, 可使用两种不同的方法: 高斯全选主元消去法和 Cholesky 分解法^[2]。在高斯

全选主元消去法中, 计算时间 T_G 为: $T_G = O[(q + \text{Iter}) \cdot 3J^3]$, Iter 是在复数域子空间上的迭代次数。复约束法的计算时间: $T_F = O(P \cdot 3J^3)$ 。可以看出, 尽管在求解循环对称结构时采用了子空间迭代思想, 但由于在求解 $[K_p] \{X\} = \{Y\}$ 时, 高斯全选主元法耗去了大量时间, 故在求解效率上甚至不如复约束方法。

在 Cholesky 方法中, 仅需一次分解 $[K_p]$, 然后求解 $q + \text{Iter}$ 次方程, 计算时间 T_c 为 $T_c = T_1 + T_2$, T_1 是进行 Cholesky 分解所需的时间, T_2 是求解方程所需的时间。它们分别为: $T_1 = O(3 \cdot J^3)$, $T_2 = O[(q + \text{Iter}) \cdot 3J^2]$ 。在处理同一计算模型时, 3 种方法计算前 5 个相位滞后的时间比较为: 复约束法耗时 29' 40", 子空间迭代中高斯全选主元消去法耗时 61' 40", Cholesky 分解法当 $q = 7$ 时耗时 7' 35", $q = 6$ 时耗时 7' 10"。可见: 利用 Cholesky 分解方法可大大提高计算效率。本算例中, 计算时间仅为复约束法的 1/4。在子结构自由度大于本算例的 J 时, 时间上的优势将会更明显。由于复数域子空间迭代法均在 q 维复空间进行广义特征值问题求解, 因此它所占用的内存要比复约束法小许多。

本文算例实际上是轴对称结构。轴对称结构可以看作循环对称结构的一个特例。以圆盘为模型主要是为了验证本文方法和程序的正确性。

5 结 论

运用 Thomas 等人建立的驻波理论在循环对称结构中的引入方法, 提出了求解循环对称结构特征值问题的复数域子空间迭代法。通过与拟波前法和复约束法的对比, 表明本文方法能够极大地减少计算时间和所需内存, 从而为详细分析这类结构的动应力响应奠定了基础, 也使在微机上求解工程实际中复杂循环对称结构的动力问题成为可能。

参 考 文 献

- 1 Thomas D L. Dynamics of Rotationally Periodic Structures. Int. J. Numer. Mech. Engrg., 79, 14: 81- 102
- 2 赵宁, 刘更, 方宗德. 循环对称结构特征值问题的复约束方法及其应用. 海口: 中国航空学会第八届机械动力传输学术会议论文集, 1995, 11
- 3 Meiroth. Analytical Methods in Vibration. Macmillan, 1969
- 4 Matthies G H. Computable Error Bounds for the Generalized Symmetric Eigenproblem. Commu. Appl. Numer. Mech., 1985, 1: 33- 38
- 5 Balasubramanian P, et al. Free- Vibration Analysis of Cyclic Symmetric Structures. Commu. Appl. Numer. Method., 1991, 7: 131- 139
- 6 刘更. 结构动力学有限元程序设计. 北京: 国防工业出版社, 1993

(责任编辑 魏星禄)