

对复模态矩阵摄动法的补充*

西北工业大学 刘济科** 张宪民 孟 光

【摘要】 针对已有的复模态摄动法不能唯一确定特征向量的所有摄动项这一缺陷,通过引进一个非常简单的范化条件,并采用常规的双正交条件,就很方便地导出了孤立特征值情形的复模态矩阵摄动公式。本文是对复模态矩阵摄动法的进一步补充和完善。

主题词: 摄动 复模态 矩阵表示

分类号: O 24 O 342

1 前 言

除了阻尼矩阵满足一定的条件外,有阻尼多自由度线性振动系统的运动方程在一般情况下不能通过实模态变换而解耦。这就需要采用复模态理论进行分析,相应的矩阵摄动法也需采用复模态的矩阵摄动法。然而,在使用模态分析时,已有的复模态摄动法并不能唯一确定特征向量的所有摄动项。文献[1]通过人为假定两系数 c_{ii} 与 d_{ii} 相等来确定 c_{ii} 与 d_{ii} ,这一假设并不总能成立(如质量阵或刚度阵不对称情况)。文献[2]回避了这两个系数。后来,文献[3]对此进行了讨论,并补充两个正规条件来确定 c_{ii} 与 d_{ii} ,是一种有效的解决途径。本文则通过引进一个更加简单的范化条件,就很简便地确定了 c_{ii} 与 d_{ii} ,并导出了孤立特征值情形的摄动公式。

2 基本方程

有阻尼多自由度系统(设质量阵、刚度阵、阻尼阵为一般的实矩阵)的自由振动方程,通过引入状态变量,其广义特征值问题总可以表示成

$$K_0 x_{i0} = \lambda_0 M_0 x_{i0} \quad (i = 1 - n) \quad (1)$$

其中, λ_0 是系统的特征值, x_{i0} 是右特征向量。

选取比例系数,总可以使 x_{i0} 满足范化条件:

$$x_{i0}^T x_{i0} = 1 \quad (2)$$

(1) 式的伴随特征值问题是 $K_0^T y_{i0} = \lambda_0^T M_0^T y_{i0} \quad (i = 1 - n)$

其中,左特征向量 y_{i0} 与右特征向量 x_{i0} 满足双正交关系,因此可取

$$y_{i0}^T M_0 x_{j0} = \delta_{ij} \quad (3)$$

当结构参数变化时, M_0 、 K_0 一般有相应的改变。设 M_0 、 K_0 的改变(摄动)量分别是 ΔM_0 、 ΔK_0 。这里 ϵ 是一个小参数,与 $\epsilon = 0$ 相应的系统就是原系统(1)。于是,摄动系统的特征值问题及其伴随特征值问题可分别表示为

1995 年 3 月收到; 1995 年 5 月收到修改稿。 * 本文系国家自然科学基金及航空科学基金资助项目

** 西安市西北工业大学 264 信箱 710072

$$(K_0 + \epsilon K_1)x_i = \lambda_i(M_0 + \epsilon M_1)x_i \quad (4)$$

$$(K_0 + \epsilon K_1)^T y_i = \lambda_i(M_0 + \epsilon M_1)^T y_i \quad (5)$$

其中, λ_i 是摄动系统的特征值, x_i, y_i 分别是相应的右、左特征向量。

下面讨论 λ_0 是孤立特征值的情况。首先将特征值和特征向量按小参数 ϵ 展开, 得

$$\lambda_i = \lambda_{i0} + \epsilon \lambda_{i1} + \epsilon^2 \lambda_{i2} + \cdots \quad (6)$$

$$x_i = x_{i0} + \epsilon x_{i1} + \epsilon^2 x_{i2} + \cdots \quad (7)$$

$$y_i = y_{i0} + \epsilon y_{i1} + \epsilon^2 y_{i2} + \cdots \quad (8)$$

(6)、(7) 式代入 (4) 式, 略去 $O(\epsilon^2)$, 比较 ϵ 的同次幂系数可得

$$\epsilon^0: K_{00}x_{i0} = \lambda_{i0}M_{00}x_{i0}$$

$$\epsilon^1: K_{01}x_{i1} + K_{10}x_{i0} = \lambda_{i0}M_{01}x_{i1} + \lambda_{i0}M_{10}x_{i0} + \lambda_{i1}M_{00}x_{i0} \quad (9)$$

同理可得, 伴随问题 (5) 应满足

$$\epsilon^0: K_{00}^T y_{i0} = \lambda_{i0}M_{00}^T y_{i0}$$

$$\epsilon^1: K_{01}^T y_{i1} + K_{10}^T y_{i0} = \lambda_{i0}M_{01}^T y_{i1} + \lambda_{i0}M_{10}^T y_{i0} + \lambda_{i1}M_{00}^T y_{i0}$$

另一方面, 摄动系统相应于 (2) 式的范化条件为

$$x_i^T x_i = 1 \quad (10)$$

(7) 式代入 (10) 式, 比较 ϵ 的同次幂系数可得

$$\epsilon^0: x_{i0}^T x_{i0} = 1, \quad \epsilon^1: x_{i0}^T x_{i1} + x_{i1}^T x_{i0} = 0 \quad (11)$$

摄动系统的特征向量满足的双正交条件为 $y_i^T(M_0 + \epsilon M_1)x_j = \delta_{ij}$

(7)、(8) 式代入上式, 并利用 (3) 式, 可得

$$\epsilon^0: y_{i0}^T M_{00} x_{i0} = 1$$

$$\epsilon^1: y_{i0}^T M_{01} x_{i1} + y_{i1}^T M_{00} x_{i0} + y_{i0}^T M_{10} x_{i0} = 0 \quad (12)$$

至此, 我们已得到了进行摄动分析所需的全部基本方程。

3 摄动公式

根据展开定理, 将右特征向量 x_{i1} 按复模态 x_{i0} 展开

$$x_{i1} = \sum_{k=1}^n C_{ik1} x_{k0} \quad (13)$$

其中 $C_{ik1} (k=1-n)$ 为待定系数。

将 (13) 式代入 (9) 式, 并利用双正交条件 (3) 式得 $C_{ij1}(\lambda_{j0} - \lambda_{i0}) + y_{j0}^T(K_{10} - \lambda_{i0}M_{10})x_{i0} = \lambda_{i1}\delta_{ij}$
 $i=j$ 时, 可得特征值的一阶摄动

$$\lambda_{i1} = y_{i0}^T(K_{10} - \lambda_{i0}M_{10})x_{i0} \quad (i=1-n) \quad (14)$$

$i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$, 所以

$$C_{ij1} = [y_{j0}^T(K_{10} - \lambda_{i0}M_{10})x_{i0}]/(\lambda_{i0} - \lambda_{j0}) \quad (i \neq j) \quad (15)$$

现在来确定系数 C_{ii1} 。用 $y_{i0}^T M_{00}$ 左乘 (13) 式, 并利用 (3) 式, 得

$$C_{ii1} = y_{i0}^T M_{01} x_{i1} \quad (16)$$

再将 y_{i1} 按相应的左特征向量展开: $y_{i1} = \sum_{k=1}^n d_{ik1} y_{k0}$, 同理可得

$$d_{ii1} = y_{i0}^T M_{01} x_{i1} \quad (17)$$

(16)、(17) 式代入 (12) 式可得

$$C_{iil} + d_{iil} = -y_{i0}^T M_{1 \times i0} \quad (18)$$

这是一不定方程, 文献[1]假定 $C_{iil} = d_{iil}$ 来确定这两个系数, 文献[2]就根本回避了这个问题。现通过本文引进的范化条件来确定 C_{iil} 、 d_{iil}

因 $X_{i1}^T X_{i0}$ 是一个数, 所以由(11)式即可得到: $X_{i1}^T X_{i0} = 0$ 。由(13)式, 即得

$$C_{iil} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij1} X_{j0}^T X_{i0} \quad (19)$$

其中 C_{ij1} ($i \neq j$) 由(15)式给出。这就完全求出了右特征向量的一阶摄动解 X_{i1} 。(19)式代入(18)式, 即唯一确定了 d_{iil} 。与求解 C_{ij1} ($i \neq j$) 的步骤完全相同, 可求得 d_{ij1} ($i \neq j$), 也就完全求出了左特征向量的一阶摄动解 y_{i1} 。此外, 特征值的一阶摄动解由(14)式给出。这样, 就求得了全部一阶摄动公式。

与一阶摄动解的推导过程完全相同, 若在有关的展开式中保留 $O(\epsilon^2)$ 项, 则可求得二阶摄动解。因篇幅所限, 在此从略。

4 讨 论

(1) 引进一个极其简单的范化条件, 就很方便地唯一确定了已有的复模态摄动法中的不确定系数; (2) 文献[3]引进两个正规条件也是一种解决途径, 但这两个条件不能随意选取, 如必须满足 $|x_i^{(k)} y_i^{(k)}| \neq 0$ 等, 而本文方法只需一个条件, 且不需附加任何条件, 因而更简便一些; (3) 本文方法与文献[3]的方法都不能处理重根或近根情况, 有关这一问题将在后续文章中详细讨论。

参 考 文 献

- 1 陈塑寰 结构振动分析的矩阵摄动理论 重庆出版社, 1991
- 2 Plaut R H Huseyin Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors in Non-Self Adjoint System. AIAA J., 1973, 11: 250-253
- 3 陈塑寰, 刘中生, 韩万芝 关于复模态矩阵摄动法的一些问题的讨论 吉林大学学报, 1993, 23(1): 1-6

(责任编辑 王震华)