

一种计算转子不平衡响应的新方法*

西北工业大学

廖明夫**

德国柏林工业大学

A. Sievi H. Walter

【摘要】建立了以状态方程和转移矩阵为基础的分析方法,以分析复杂转子的不平衡响应。在不必事先确定转子系统固有振型及自振频率的情况下,利用此方法可直接求得转子振动响应的精确解。该方法与传递矩阵法相结合,可容易地求解复杂转子系统的不平衡响应问题。算例分析表明,该方法简捷有效。

主题词: 状态方程 转移函数矩阵 转子 响应

分类号: V231.92

1 前言

一般情况下,转子不平衡为一空间分布的函数。进行振动响应分析时,采用模态分析的方法^[1,2]。为此,须预先确定转子的各阶固有振型及自振频率。对于复杂转子,固有振型和自振频率的确定是一繁琐的工作,并且难以求得精确解。本文把控制论中的状态方程及转移矩阵^[3,4]推广到连续体振动的分析中,以求解转子的不平衡响应。此方法的思想是首先把描述转轴(连续体)振动的高阶空间微分方程转换成状态方程,从而把对原始方程的求解转化为对状态方程的求解,而状态方程的求解由转移矩阵来描述,转移矩阵最终由系统矩阵决定。对转轴的振动,转移矩阵很容易求得,从而避免了求解转子固有振型及自振频率。另外,所得到的转移矩阵易于与传递矩阵相结合。因此利用上述方法可计算各种复杂转子的振动响应。根据一转子模型,对此方法进行了检验,并与转轴质量离散后的传递矩阵方法进行了比较。结果表明,利用状态方程和转移矩阵的方法在少量计算的情况下,即可求得系统的精确解。

2 转轴的振动方程及其解

转轴的振动可由如下的方程来描述

$$EI[\partial^4 s(z, t) / \partial z^4] + \rho A[\partial^2 s(z, t) / \partial t^2] = -\rho A[\partial^2 e_0 s(z, t) / \partial t^2] \quad (1)$$

经分离之后,方程变为如下的空间方程:

$$d^4 s(z) / dz^4 - k^4 s(z) = k^4 e_0(z) \quad (2)$$

式中 $k^4 = \rho A \Omega^2 / EI$ 。其中 E 为弹性模量, I 为截面惯性矩, ρ 为材料密度, A 为截面面积, 而 $e_0(z)$ 表示转轴质量偏心。

根据模态分析法,方程的解可表示为

$$s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} C_n S_n(z) \quad (3)$$

式中 ω_n 为转轴的第 n 阶自振频率, $S_n(z)$ 为对应的第 n 阶固有振型, 而系数 C_n 则由下式确定

$$C_n = \int \Theta(z) S_n(z) dz \bigg/ \int S_n^2(z) dz, \text{ 最后得到等截面轴在不平衡作用下的振动为}$$

$$s(z, t) = e^{j\Omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2}{1 - \eta_n^2} C_n S_n(z) \quad (4)$$

式中 $\eta_n = \Omega/\omega_n$ 为第 n 阶转速比。由式(3)可见, 当转子的模态已知时, 就很容易求得转子的不平衡响应。但对于较为复杂的转子, 确定其模态并非易事。因此常常采用离散的方法近似求解。为了保证足够的精度, 离散方法的计算量相当大。为此, 需建立新的方法, 不必事先确定转子固有模态即可求得转子不平衡响应的精确解。

3 转子运动的状态方程及其解

方程(2)可经如下的变换 $x_1 = s(z)$, $x_2 = s'(z)$, $x_3 = s''(z)$, $x_4 = s'''(z)$ 转化为状态方程

$$\dot{x} = Ax + Bu(z) \quad (5)$$

其中 $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 为状态向量, $u(z) = [0, 0, 0, k^4 \Theta(z)]^T$ 为不平衡向量, A 为系统矩阵。它只与系统参数 k 有关, 而 B 为输入矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k^4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据控制论, 方程(5)的解为

$$x(z) = \Phi(z, 0)x(0) + \int_0^z \Phi(z - \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (6)$$

式中 $\Phi(z, 0)$ 为系统转移矩阵, 它取 $\Phi(z, 0) = e^{[A]z}$ 的形式。

可见, 对原始 4 阶空间微分方程的求解就转换为对一阶状态微分方程的求解。当转移矩阵 $\Phi(z, 0)$ 确定后, 方程的解就可根据式(6)由初始状态向量以及转子不平衡量求得。

由于系统矩阵 $[A]$ 的特征值为 $\lambda_1 = k$, $\lambda_2 = -k$, $\lambda_3 = jk$, $\lambda_4 = -jk$, 其对应的右向特征矩阵 $[W]$ 及左向特征矩阵 $[V]$ 分别为

$$[W] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k^{-3} & -k^{-3} & jk^{-3} & -jk^{-3} \\ k^{-2} & k^{-2} & -k^{-2} & -k^{-2} \\ k^{-1} & -k^{-1} & -jk^{-1} & jk^{-1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [V] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k^3 & k^2 & k & 1 \\ -k^3 & k^2 & -k & 1 \\ -jk^3 & -k^2 & jk & 1 \\ jk^3 & -k^2 & -jk & 1 \end{bmatrix}$$

因此转移矩阵 $\Phi(z, 0)$ 可写成为

$$\Phi(z, 0) = e^{[A]z} = [W] \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & e^{\lambda_1 z} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_4 z} \end{bmatrix} [V] = \begin{bmatrix} T_0 & T_1 & T_2 & T_3 \\ k^4 T_3 & T_0 & T_1 & T_2 \\ k^4 T_2 & k^4 T_3 & T_0 & T_1 \\ k^4 T_1 & k^4 T_2 & k^4 T_3 & T_0 \end{bmatrix}$$

其中

$$T_0 = \frac{1}{2}(\cosh kz + \cos kz), \quad T_1 = \frac{1}{2k}(\sinh kz + \sin kz)$$

$$T^2 = \frac{1}{2k^2}(\cosh kz - \cos kz) \quad , \quad T^3 = \frac{1}{2k^3}(\sinh kz - \sin kz)$$

将 $\Phi(z, 0)$ 代入 (6) 式后就可求得转轴的不平衡响应。由此就避免了确定转轴的固有模态。状态向量 x 可经变换转换成包含振动位移、转角、弯矩和剪力的力学向量, 即

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} s \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}$$

代入 (6) 式并整理得

$$\begin{Bmatrix} s \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = [T(z, 0)] \begin{Bmatrix} s_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix} + \int [C]^{-1} \Phi(z - \tau) Bu(\tau) d\tau \quad (7)$$

式中 $[T(z, 0)] = [C]^{-1} \Phi(z, 0) [C]$ 。经此转换后, 转移矩阵 $T(z, 0)$ 就变成了传递矩阵。为进一步与传递矩阵法相结合, 将 (7) 式写成标准传递矩阵的形式

$$\begin{Bmatrix} s \\ \theta \\ M \\ Q \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T(z, 0) & \\ & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s \\ \theta \\ M \\ Q \\ 1 \end{Bmatrix}_0 \quad (8)$$

式中 $t = \int [C]^{-1} \Phi(z - \tau) Bu(\tau) d\tau$ 。由此可见, 转子上任一轴段的振动量均可根据式 (8) 由一个截面向另一个截面传递。对于转子上的圆盘、支承或者联轴节, 采用标准的传递矩阵传递即可。因此对于任何复杂转子系统这一方法都是适用的。

4 算 例

加工误差、装配误差, 特别是起停过程中的热不均匀, 使得转子轴发生弯曲。这一弯曲在转子运行过程中作为不平衡使转子发生振动。因此, 取图 1 所示的带弯曲轴的转子模型作为分析对象。假设转轴的弯曲由以下的函数描述:

$$W_I(z) = (a^2/12EI)(z - z^2/a) \quad 0 \leq z \leq a$$

$$W_{II}(z) = (a^2/16EI)(z - a) \quad a \leq z \leq a + b$$

若用模态分析的方法求解此转子的振动响应, 须预先确定转子的固有模态。但即使对图 1 所示的简单转子,

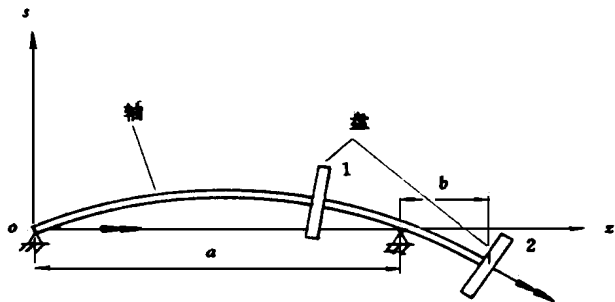


图 1 带弯曲轴的转子模型

确定其固有模态也较麻烦。现利用状态方程及转移矩阵的方法求解。为此仅需将轴分为 3 段。每一段传递矩阵取式 (8) 的形式。而对两个盘及支承, 则利用标准的传递矩阵进行传递。所求得解即为转子不平衡响应的精确值。

为进行比较, 将轴质量离散为若干集中质量。利用传统的传递矩阵法进行计算。两种方法计算的结果表示在图 2 上(图中—表示转移矩阵方法的结果; --- 表示传递矩阵方法的结果(25 个离散质量和 22 个轴段); ··· 表示传递矩阵方法的结果(58 个离散质量和 55 个轴段))。由图可见, 随着离散的集中质量数目的增加, 由传递矩阵法算得的响应逐渐逼近由转移矩阵方法算得的结果。但此时所取的集中质量数目为 58, 无质量弹性梁段数为 55。这就意味着 113 个 5×5 矩阵相乘。如果转轴的弯曲具有更为复杂的形式, 要达到满意的精度, 则需进一步精细离散轴的质量, 即还要增加集中质量的数目。但计算量和计算误差也随之进一步增加。

以上算例表明, 利用状态方程以及转移矩阵方法求解转子的不平衡振动响应, 简捷有效, 只需少量的计算即可得到转子响应的精确解。

5 结 论

为了分析转子的不平衡振动响应, 建立了以状态方程及转移矩阵为基础的分析方法。在不事先确定转子系统固有振型及自振频率的情况下, 利用该方法可直接求得转子振动响应的精确解。由于转移矩阵经简单变换后, 可转换为标准的传递矩阵, 因此该方法与传递矩阵法相结合, 可容易地求解复杂转子系统的不平衡响应问题。算例分析表明, 利用状态方程及转移矩阵方法确定转子的振动问题, 简捷有效、精度高。

参 考 文 献

- 1 顾家柳, 刘启洲等. 转子动力学. 北京: 国防工业出版社, 1985
- 2 Gasch R. Rotordynamik Vorlesungsscript. Institut fuer Luft- und Raumfahrt, Technical University of Berlin, 1994
- 3 Meirovitch L. Elements of Vibration Analysis. McGraw-Hill Book Company, 1986
- 4 Ludyk. Theoretische Reglungstechnik 1. Springer Verlag Heidelberg, New York, 1995

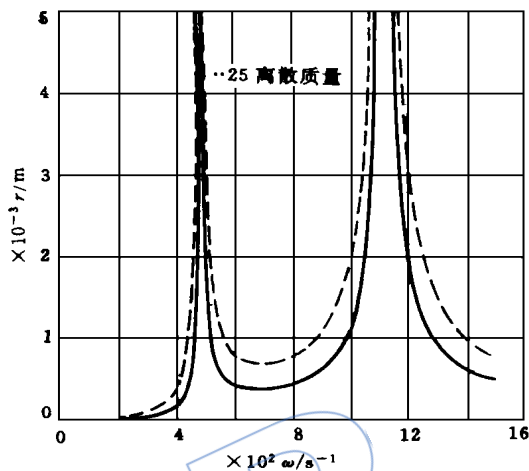


图2 盘 1 的振动幅值随转速的变化

(责任编辑 魏星禄)

FULL- LENGTH PAPERS

A NEW APPROACH TO DETERMINING ROTOR DYNAMIC RESPONSE

Liao Mingfu

(*Dept. of Aeroengines, Northwestern Polytechnical University, Xian 710072*)

Alex Sievi and Hartmut Walter

(*Institute for Aeronautics and Astronautics, Technical University of Berlin, Germany*)

ABSTRACT In order to determine the dynamic response of a complex rotor system to imbalance, a new approach is developed, based on the state equation and transition matrix of motion of a rotor. By means of this method, the exact solution of rotor vibration response can be directly obtained without any information about its modes in advance. Furthermore, as the transition matrix can be transformed into a transfer matrix, so this approach can be combined with transfer- matrix method, and the dynamic response of a complex rotor system to imbalance can be easily computed. A numerical example shows, that this approach is an effective and short- cut method.

Key Words Equations of states Transfer function matrix Rotors Responses

A COMPUTATIONAL MODEL FOR LIFE CONSUMPTION AND LIFE MONITORING OF AEROENGINE

He Jinglan, Hong Jie, Li Qihan

(*4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083*)

ABSTRACT A mathematical model is set up for life consumption of the high temperature parts in aero- engine. Low Cycle Fatigue, Thermal Fatigue, Creep, and any combination of them are considered in the model. Engine life usage must be determined for each flight mode by its mission analysis. A military engine flight mode can be divided into three types of cycle: zero- maximum RPM- zero, cruise- intermediate- cruise, idle- maximum - idle. The relative life consumption and remaining life of the high temperature parts of an engine for every flight can be obtained by the Miner's Rule summation. As an example, the life consumption of the high pressure turbine disk of a given engine is calculated by the model. Based on the mathematical model and its computational program in C language, the real - time life monitoring of high temperature parts in an aeroengine can be conducted.

Key Words Lifetimes Cyclic loads Monitoring Consumption