

变幅加载下疲劳可靠性分析*

上海交通大学 倪侃** 张圣坤 北京航空航天大学 高镇同

【摘要】 分别对疲劳载荷、寿命与强度的随机性进行了分类。基于二维概率 Miner 准则,建立了在变幅载荷谱或随机时间历程载荷谱给定的条件下,对结构构件进行疲劳可靠性分析的新方法,并由此推导出统计 Miner 准则中 α 的分布。最后,分别给出了实验数据验证结果和工程应用实例,显示出该方法具有简便性和实用性。

主题词: 随机过程 随机载荷 疲劳力学性质

分类号: V215.52 O346.2 TB114.3

1 前言

在变幅或随机时间历程加载条件下,如何对工程结构进行疲劳可靠性分析,是概率疲劳理论的一个核心问题。在已有的分析模型中,主要存在两个问题:(1)对疲劳载荷、寿命与强度的随机性未能进行明确的分类;(2)对疲劳损伤累积的力学机理与概率机理未能进行有机的结合。例如,概率递推法^[1]只适用于多级变幅加载,且无实验验证;疲劳应力—强度干涉模型^[2]由于建立在等幅 $P-S-N$ 曲线族基础上,故实际上只适用于每一个体为等幅加载的情况;在 B 模型^[3]中,未能分清疲劳损伤具有两类不同的概率机制—即疲劳损伤增长不但在单一个体之内具有随机性,而且在不同个体之间存在更大的分散性;对于统计 Miner 准则^[4]与 $\alpha-\alpha$ 干涉模型^[5]由于 α 和 α_c 的概率分布一般随载荷谱的变化而变化,使得其实用性受到较大影响。因此,有必要建立一种在变幅或随机时间历程加载下进行疲劳可靠性分析的新方法。本文以下用 N_e 代表等幅疲劳寿命, N_v 代表变幅或随机时间历程加载下的疲劳寿命,而 N 代表任意加载形式下的载荷循环次数。

2 疲劳载荷、寿命与强度三者随机性的分类

对单一试件(或构件)个体而言,疲劳载荷及其所产生的疲劳应力分为等幅、变幅与随机时间历程等 3 种情况。对试件母体而言,当此母体中的每一个体均承受同一疲劳载荷时,若进一步考虑到所有个体由于尺寸等分散性造成的个体差异,则疲劳应力应分为随机—等幅、随机—变幅与随机—随机应力时间历程这 3 种情况。以随机—随机应力时间历程为例,前一个随机性是对试件母体中的不同个体而言,后一个随机性是对单一试件个体应力循环的时间历程而言。在工程上,当结构尺寸的分散性可忽略不计时,则给定母体的疲劳载荷也就给定了个体的疲劳应力。如果试件母体中的每一个体都承受同一疲劳应力,则由于个体间材料性能的分散性,可

1996 年 8 月收稿,1996 年 10 月收到修改稿。

* 本文系国家自然科学基金资助(编号:59605010)和中国博士后基金项目

** 上海交通大学船舶与海洋工程系船舶结构力学研究所 200030

将疲劳寿命分为随机—等幅、随机—变幅与随机—随机应力时间历程等 3 种情况。如果疲劳应力对于试件母体也存在分散性, 则疲劳寿命可进一步分为随机—随机—等幅、随机—随机—变幅与随机—随机—随机应力时间历程这 3 种情况。

疲劳强度的经典定义是^[6]: 当指定等幅疲劳循环寿命 N_c 时, 由等幅 $S-N_c$ 曲线求得的相应的应力水平; 疲劳强度概率分布, 则可由等幅 $P-S-N_c$ 曲线族得到^[7]。由于 $S-N_c$ 曲线和 $P-S-N_c$ 曲线族, 是在对试件母体中的每一个体进行等幅加载而得到的, 故本文将此疲劳强度定义成为随机—等幅疲劳强度, 其随机性表现在: 试件母体中的每一个体均为等幅加载, 每一个体的寿命均相等, 但每一个体的疲劳循环应力水平对母体而言乃一随机变量。类似地, 可定义随机—变幅疲劳强度与随机—随机应力时间历程疲劳强度, 具体求解方法见文献[8]。

本文以下主要研究母体中每一个体均承受给定的同一变幅以及随机时间历程谱载下的疲劳可靠性分析, 这是工程上最基本的问题。

3 基于二维概率 *Miner* 准则的变幅疲劳可靠性分析

在文献[9]中, 提出了随机疲劳损伤累积的力学机理和概率机理, 建立了二维概率 *Miner* 准则, 其主要形式有两种: 设母体承受的二维变幅循环应力谱块为 (S_{ai}, S_{mj}, n_{ij}) , $i=1, 2, \dots, k_i$ 和 $j=1, 2, \dots, k_j$ 块谱数为 T , 则 $TPMINER$ 为(p 为可靠度, 且在下标中表示可靠度值为 p 的百分位点)。

$$T_p \cdot \sum_i \sum_j \frac{n_{ij}}{N_{cp}(S_{ai}, S_{mj})} = 1, \quad N_{vp} = T_p \cdot \sum_i \sum_j n_{ij} \quad (1)$$

$$\Pr\{N_v \leq N_{vp}\} = 1 - p$$

对于平稳各态历经的随机应力时间历程谱块, 先对其进行雨流计数, 得到等价的二维连续谱块, 设块谱内的总循环次数为 n_t , (S_a, S_m) 的二维分布密度函数为 $f(S_a, S_m)$, 积分域为 Q , 则 $TPMINER$ 为

$$T_p \cdot \iint_Q \frac{n_t \cdot f(S_a, S_m)}{N_{cp}(S_a, S_m)} dS_a dS_m = 1, \quad N_{vp} = T_p \cdot n_t, \quad \Pr\{N_v \leq N_{vp}\} = 1 - p \quad (2)$$

上两式中的 $N_{cp}(S_{ai}, S_{mj})$ 和 $N_{cp}(S_a, S_m)$ 由等幅 $P-S_a-S_m-N_c$ 曲面族方程^[7]求得。

另外, 由中值等幅 $S_a-S_m-N_c$ 曲面求得中值等幅寿命 $N_c(S_a, S_m)$ 由 $TPMINER$ 求得 T_p 和 N_{vp} , 再由下式便可求得统计 *Miner* 准则中的 α 及其分布

$$\alpha_p = T_p \cdot \sum_i \sum_j \frac{n_{ij}}{N_c(S_{ai}, S_{mj})}, \quad \alpha_p = N_{vp} \cdot \iint_Q \frac{f(S_a, S_m)}{N_c(S_a, S_m)} dS_a dS_m = 1$$

$$\Pr\{\alpha \leq \alpha_p\} = 1 - p \quad (3)$$

3.1 一维变幅疲劳可靠性分析

首先, 考虑工程上最常见的一种情况: 疲劳应力均值 $S_m = 0$, 等幅疲劳 $P-S_a-N_c$ 为双对数坐标上的平行线族(其中, 指数 m 为常量, C 为随机变量):

$$N_c S_a^m = C, \quad N_{cp} S_a^m = C_p, \quad \Pr\{N_c \leq N_{cp}\} = \Pr\{C \leq C_p\} = 1 - p \quad (4)$$

设母体承受的 $S_m = 0$ 的一维变幅应力谱块为 (S_{ai}, n_i) , $i=1, 2, \dots, k_i$, 块谱数为 T , 由式(4)可得 $N_{cp}(S_{ai}) = C_p \cdot S_{ai}^{-m}$, 再结合式(1)可得

$$T_p \cdot \sum_i \frac{n_i \cdot S_{ai}^m}{C_p} = 1, \quad N_{vp} = \frac{\sum_i n_i}{\sum_i (n_i \cdot S_{ai}^m)} \cdot C_p$$

$$\Pr\{N_v \leq N_{vp}\} = \Pr\{C \leq C_p\} \quad (5)$$

若母体承受的是 $S_m = 0$ 的平稳各态历经的窄带随机应力时间历程谱块, 块谱内的总循环次数为 n_t , S_a 的分布密度函数为 $f(S_a)$, 积分域为 Q , 由式(4)和(2)可得

$$T_p \cdot \int_Q \frac{n_t \cdot S_a^m}{C_p} f(S_a) dS_a = 1, \quad N_{vp} = \frac{C_p}{E(S_a^m)}, \quad \Pr\{N_v \leq N_{vp}\} = \Pr\{C \leq C_p\} \quad (6)$$

其中, $E(S_a^m)$ 为 S_a 的 m 阶原点矩。

另外, 设由式(4)可得中值等幅 $S_a - N_c$ 曲线为 $N_c S_a^m = \bar{C}$, 其中 N_c 和 $\bar{C}$ 分别为 N_c 和 C 的中值, 由式(3)可得

$$\alpha_p = T_p \cdot \sum_i \frac{n_i}{N_c(S_{ai})} = \frac{C_p}{\bar{C}}, \quad \alpha_p = T_p \cdot \int_Q \frac{n_t \cdot S_a^m}{\bar{C}} f(S_a) dS_a = \frac{C_p}{\bar{C}} \quad (7)$$

此时, α 的中值恒为 1, α 的概率分布即 $C/\bar{C}$ 的分布。

在工程上, 等幅疲劳 $P - S_a - N_c$ 曲线一般常见的还有如下的三参数形式和指数形式:

$$N_{cp} \cdot (S_a - S_{\varphi})^{m_p} = C_p \quad (8)$$

$$S_a = a_p + b_p \cdot \lg N_{cp}, \quad N_{cp} = 10^{(S_a - a_p)/b_p} \quad (9)$$

此时, 一维变幅或窄带随机时间历程加载下的疲劳可靠性分析步骤与上类似(略)。

3.2 二维变幅疲劳可靠性分析

在文献[7]中提出了一种建立二维等幅疲劳 $P - S_a - S_m - N_c$ 曲面族方程的方法: 首先, 设 $S_m = 0$ 的等幅 $P - S_a - N_c$ 曲线族取三参数形式, 见式(8); 其次, 设等寿命图可近似用 *Goodman* 或 *Morrow* 等曲线表示, 例如 $S_a/S_{\varphi} + S_m/\sigma_{bp} = 1$ 。其中, S_{φ} 为 $S_m = 0$ 及任意等幅寿命 N_{cp} 下对应可靠度值为 p 的等幅疲劳强度, σ_{bp} 为对应可靠度值为 p 的材料断裂强度极限。由该等分布曲线求出 S_{φ} 代替式(8)中 S_a , 使得等幅 $P - S_a - S_m - N_c$ 曲面族方程:

$$N_{cp} \cdot \left[\frac{S_a}{1 - S_m/\sigma_{bp}} - S_{\varphi} \right]^{m_p} = C_p \quad (10)$$

于是, 对于二维变幅循环应力谱块, 由式(2)可得

$$N_{vp} = C_p \cdot \left[\sum_i \sum_j n_{ij} \right] \left[\sum_i \sum_j n_{ij} \left[\frac{S_{ai}}{1 - S_{mj}/\sigma_{bp}} - S_{\varphi} \right]^{m_p} \right]^{-1} \quad (11)$$

对于平稳各态历经随机应力时间历程谱块, 由式(3)可得

$$N_{vp} = C_p \cdot \iint_Q \left[\frac{S_a}{1 - S_m/\sigma_{bp}} - S_{\varphi} \right]^{m_p} \cdot f(S_a, S_m) dS_a dS_m \quad (12)$$

当等幅 $P - S_a - N_c$ ($S_m = 0$) 曲线族方程为式(4)时, 在式(11)和(12)中, m_p 为常量, $S_{\varphi} = 0$ 。若 σ_b 的分散性较小, 在工程上可将其视为常量, 则仍可得 $\alpha_p = C_p/\bar{C}$ 。

至于式(8)、(11)和(12)中 S_{φ} 、 m_p 和 C_p 取值的确定方法, 见文献[10]。

当等幅 $P - S_a - N_c$ ($S_m = 0$) 曲线族方程为式(9)时, 分析步骤与上类似。

4 实验数据验证

以文献[11]所给出 *LY12-CZ* 中心孔试件的变幅疲劳试验结果来进行验证。其中, 阵风变幅载荷谱(*F* 谱)、等幅疲劳试验结果和 *F* 谱下的变幅疲劳寿命结果分别见文献[11]中的表 1(b)、表 3 和表 5。在 *F* 谱及等幅试验中, 应力均值为定值, $S_m = 101.92 \text{ N/mm}^2$ 。

验证步骤为: (1) 由试验结果可判定等幅和变幅疲劳寿命均服从对数正态分布; (2) 求出变幅寿命每一个试验值 N_{vi} ($i = 1, \dots, 21$) 对应的可靠度值 p_i ; (3) 再求出等幅试验中每级应力水

平 S_{aj} ($i=1, \cdots, 6$) 对应的可靠度值 p_i 的等幅寿命 N_{pi} ; (4) 由数据点 (S_{aj}, N_{pi}) , $j=1, \cdots, 6$ 作图, 可判定等幅 $p_i-S_a-N_c$ 曲线可近似用两参数方程表示, 即 $N_{cp}S_a^{m_p}=C_p$, 由线性回归求得对应 p_i 的 m_{pi} 和 C_{pi} ; (5) F 谱为四级变幅加载 (S_{ak}, n_k) , $k=1, \cdots, 4$ 与式 (5) 类似, 可求得对应可靠度值为 p_i 的变幅寿命为:

$$N_{vp_i} = \frac{\sum_k n_k}{\sum_k (n_k \cdot S_{ak_i}^{m_{pi}})} \cdot C_{pi} \quad , \quad \Pr\{N_v \leq N_{vp}\} = 1 - p_i$$

表 1 文献[11] 试验数据验证(N_{vi} 为试验值, N_{vpi} 为预测值; 单位: 循环次数)

i	$p_i/\%$	N_{vi}	N_{vpi}	i	$p_i/\%$	N_{vi}	N_{vpi}	i	$p_i/\%$	N_{vi}	N_{vpi}
1	89.85	528000	479971	8	73.04	593000	576886	15	39.33	693000	736534
2	88.25	536000	491589	9	61.35	628000	631364	16	32.42	716000	774944
3	84.38	553000	516572	10	46.85	670000	698740	17	28.83	729000	796918
4	83.64	556000	521022	11	45.84	673000	703634	18	26.76	737000	810537
5	82.87	559000	525483	12	44.51	677000	710179	19	26.00	740000	815660
6	81.01	566000	535941	13	41.56	686000	724965	20	3.91	901000	1104732
7	74.91	587000	567705	14	41.24	687000	726614	21	0.26	1080000	1455619

从表 1 可见, 本文方法的预测值与试验值相当吻合, 而现有的其它方法^[1-5] 都不能直接由 F 谱和等幅试验结果进行变幅寿命及其可靠性预测。笔者还做了其它 20 多组试验数据验证, 预测结果也相当好, 限于篇幅, 将有另文专述。

5 应用实例

某结构的受力关键构件由金属材料 40CrNiMo 制成, $\sigma_b=2308.31 MPa$ 。首先, 对该构件的模拟试件进行等幅疲劳试验求得 $P-S_a-N_c$ 曲线族方程 ($S_m=0, K_t=2$); 其次, 该试件母体的等寿命图可用 *Morrow* 曲线近似表示, 由于 σ_b 的分散性远小于疲劳寿命的分散性, 在此视 σ_b 为常量; 于是, 可由式 (11) 得到相应的等幅 $P-S_a-N_c$ 曲线族方程, 其中:

$$p=50\% \qquad (S_p, m_p, C_p) = (325.0641, 1.5671, 1.2265 \times 10^8)$$
$$p=99.9\% \qquad (S_{op}, m_p, C_p) = (309.2917, 1.0946, 4.4617 \times 10^6)$$

图 1 是由实测再经雨流法计数得到的该构件所承受的二维变幅载荷谱。在此谱载作用下, 由式 (12) 可分别求得 $N_{v50\%}=3.8997 \times 10^8$, $N_{v99.9\%}=7.4158 \times 10^7$ (单位: 循环次数)。

由于疲劳寿命一般可由对数正态分布来近似表示, 于是, $lgN_v \sim N(\mu, \sigma)$, 其中 μ 和 σ 分别为 lgN_v 的均值与标准差, 则有

$$lgN_{vp} = \mu + u_p \cdot \sigma \quad , \quad \mu = lgN_{v50\%} \quad , \quad \sigma = (lgN_{v99.9\%} - \mu) / u_{99.9\%}$$

其中, u_p 为标准正态随机变量可靠度值为 p 的百分位值, $u_{99.9\%}=-3.09$ 。立即可求得 $(\mu, \sigma)=(8.5910, 0.2333)$, 此时 N_v 的分布便完全确定下来, 见图 2。

6 结束语

在等幅疲劳试验结果和变幅或随机时间历程载荷谱确定以后, 如何对结构进行相应的变幅或随机时间历程加载下的疲劳可靠性分析, 一直是理论上和工程上的研究难点和热点, 本文

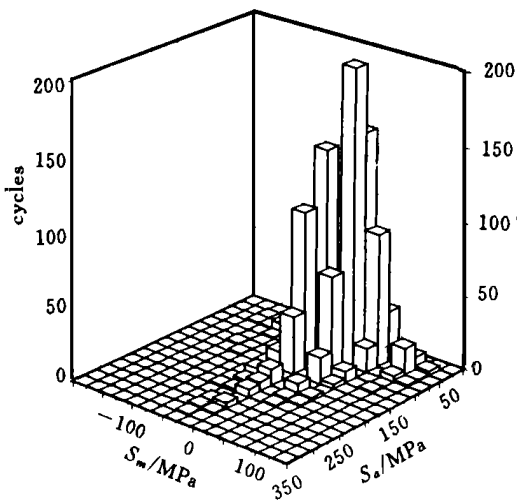
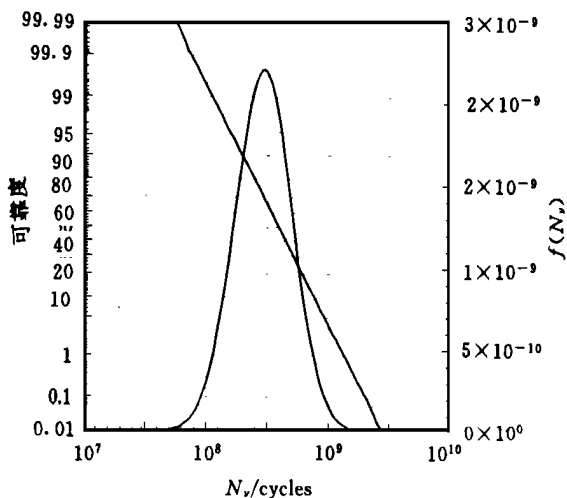
图1 二维 16×16 变幅载荷谱

图2 二维变幅疲劳寿命概率分布

的方法初步解决了这一问题,并且已得到二级、多级变幅与二维伪随机变幅试验数据验证结果的良好支持,但仍有待随机时间历程疲劳加载试验的进一步验证。

参 考 文 献

- 1 Kececioghl D, Chester L B, Gardner E D. Sequential Cumulative Fatigue Reliability. Proc. R M Symp, 1974: 533- 539
- 2 Kececioghl D. Reliability Analysis of Mechanical Components and Systems. Nuclear Engineering and Design, 1972, 19: 259- 290
- 3 Bogdanoff J L. A New Cumulative Damage Model: Part 1. J. Appl. Mech, 1978, 45(2): 246- 250
- 4 Shimokawa T, Tanake S. A Statistical Consideration of Miner's Rule. Int. J Fat, 1980, 2(4): 165- 170
- 5 Ichikawa M. An Extension of the Reliability- Based Design Method for Variable Amplitude Fatigue. Reliability Engineering, 1987, 17: 181- 187
- 6 Weibull W. Fatigue Testing and Analysis of Results. The Macmillan Company, 1961
- 7 Nikan Gaozhentong. Constant Amplitude Fatigue Strength and $P-S_a-S_m-N_c$ Surface Family. Chinese J. of Aeronautics, 1996, 9(1): 28- 39
- 8 倪侃. 随机变幅加载下疲劳强度可靠性分析. 上海交通大学学报, 1996, 30(2): 23- 29
- 9 倪侃. 结构疲劳可靠性二维概率 Miner 准则及其应用: [学位论文]. 北京航空航天大学, 1994
- 10 高镇同. 疲劳应用统计学. 国防工业出版社, 1986: 357- 359
- 11 伍义生. Miner 累积损伤理论的试验验证和统计分析. 航空学报, 1985, 6(4): 351- 360

(责任编辑 魏星禄)

FULL- LENGTH PAPERS

CALCULATION AND ANALYSIS OF FATIGUE CRACK GROWTH UNDER ULTRASONIC FATIGUE LOADING

Ni Jingang and Zhang Xueren

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT

Stress and modal analyses of an ultrasonic vibration system, consisting of a notched specimen and one or two amplifying horns have been performed by using 3D finite element calculation. The stress intensity factors in ultrasonic fatigue crack propagation are evaluated by means of displacement and energy approaches. The particular advantages as well as limitations of the two approaches are briefly discussed. Two types of ultrasonic fatigue loading with different stress ratio are exerted on the specimen respectively. The comparison between these two approaches comes to the conclusion that the energy approach is more accurate. It has wide range of practicality in engineering.

Key Words Fatigue crack Finite element methods Energy method

FATIGUE RELIABILITY ANALYSIS UNDER VARIABLE AMPLITUDE

Ni Kan and Zhang Shengkun

(Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

Gao Zentong

(5th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT

First of all, randomness of fatigue loading, fatigue life and fatigue strength are classified into three types of random- constant amplitude, random- variable amplitude and random- stochastic time history, respectively. Then, according to Miner's two- dimensional Probabilistic Rule, a new reliability- based prediction procedure of fatigue life is established for the structural component subjected to one- dimensional and two- dimensional cyclic loadings of variable amplitude or stochastic time history. Meanwhile, the probability distribution of α in Statistical Miner Rule is derived. The verification of the obtained results by means of variable amplitude experiment at data of fatigue life shows that the new prediction procedure is very accurate. In the end, an example is presented in detail, which indicates that this new procedure is of simplicity and of feasibility in engineering application.

Key Words Random loads Stochastic process Fatigue