

换热反问题输入数据的正则预处理 及其对解的影响*

华中理工大学 周静伟** 程尚模
中国计量学院 李文军 李希靖

【摘要】 基于 Tikhonov 的正则平滑思想,对换热反问题中的输入数据进行平滑处理。通过对模拟实测数据的处理与求解表明,平滑后可以显著地提高反问题求解的精度与稳定性。这种正则平滑法比通常用的基于最小二乘原理的滑动平均法更为优越。

主题词: 换热 正则化 精度 稳定性

分类号: TK124

1 正则平滑方法原理

从数学上说,换热反问题是一种不适定(或称病态)问题,对测量误差非常敏感。由于实测数据不可避免地带有随机误差,因而直接用传统的数值计算方法去处理反问题时,难以获得稳定而高精度的解^[1,2]。所以对实测数据进行预处理是十分必要的。本文利用 Tikhonov 的正则化思想^[3]对这一问题进行了研究,使反问题解的稳定性和准确性得以提高,并可采取更小的时间步长,以便获得更多的信息量。这种数据处理方法比通常的滑动平均法效果更佳,因而对一般的工程测量数据处理同样适用,有很大的广泛性。

为了使实测数据达到“平滑”的效果,就要求所使用的信息处理方法能保证对所研究的函数(例如温度)及其导数均能一致逼近,这一要求本身便是一个不适定问题,在数学上可写为如下的算子方程: $Az = u_\delta, z \in Z, u_\delta \in U$ 。式中, z 为所讨论的函数, u_δ 为带有误差的实测数据, A 为从空间 Z 到空间 U 的单位算子。应用 Tikhonov 的正则化思想可归结为求解以下正则泛函的极小值问题: $M^\alpha[z] = \|Az - u_\delta\|_U^2 + \alpha \|z\|_Z^2$ 。其 $\|\cdot\|$ 为范数, α 为正则参数, U 取为平方可积空间 L_2 , Z 则必须取 Sobolev 空间 W_2^k ,它能保证正则解 z_α 及其 $k-1$ 阶导数均一致收敛。一般情况下, k 可取为 2。将泛函 $M^\alpha[z]$ 对每一个 $z_i, i=1,2,\dots,m$ 求偏导数,并令其为零,可得到一线性方程组,解此方程组可得到正则平滑后的函数 z_i 。在正则平滑过程中可发现,选择适当的正则参数 α 是问题的关键,它直接关系到平滑的效果和逼近的程度。若实测数据的总误差为 δ ,则根据偏差原理,平滑后的函数与实测数据之间的偏差不可能小于实测数据的原始误差,极限情况下两者相等。因而由下式确定的 α 可实现最佳逼近: $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$ 。确定最佳的正则参数 α_{opt} 是个最优化问题,实际应用时可以用对分法或等比数列法近似得出。需要指出的

1995年9月收稿;1996年2月收到修改稿。 * 本文系国家及浙江省自然科学基金资助项目

** 杭州市中国计量学院热工室 310034

是,一般情况下实测数据的方差 σ^2 是很难估算的,因而其总误差也不可能准确给出,尤其是经常碰到的换热反问题中的测温随机过程,往往只有一个样本,这时就需要采用非常规的由单样本估算方差的新方法^[4]。

2 导热反问题举例及其分析解、模拟计算及结果分析

传热学中以导热反问题最为常见,研究得也最为透彻。以圆柱体的一维线性导热反问题为例来讨论,引入无量纲径向坐标 $\bar{r}=r/R$ 及无量纲时间 $\bar{\tau}=\alpha\tau/R^2$,则其主导方程为:

$$\partial T/\partial \bar{\tau} = \partial^2 T/\partial \bar{r}^2 + (1/\bar{r})(\partial T/\partial \bar{r}) \quad , \quad 0 < \bar{r} < 1 \quad , \quad 0 < \bar{\tau} < \bar{\tau}_{\max} \quad (1)$$

初始条件与边界条件分别为:

$$T(\bar{r}, 0) = \Psi(\bar{r}) \quad , \quad (\partial T/\partial \bar{r})|_{\bar{r}=0} = 0 \quad (2)$$

假定作为补充条件的输入数据由圆柱体中心处的温度变化给定:

$$T(0, \bar{\tau}) = \varphi(\bar{\tau}) \quad (3)$$

所要求的是圆柱体外表面温度 $T_w(\bar{\tau})$,这是一个柯西提法的边值反问题。一般情况下反问题不易得到分析解,如果输入数据是连续可微的,则该反问题可得出以无穷级数形式表示的分析解^[5]。设 $\Psi(\bar{r})=J_0(b\bar{r})$, $\varphi(\bar{\tau})=\exp(-b^2\bar{\tau})$,其中 b 为一非负的参数, $J_0(x)$ 为第一类零阶贝塞尔函数,则可得到如下非级数形式的精确解^[6]: $T(\bar{r}, \bar{\tau})=J_0(b\bar{r})\exp(-b^2\bar{\tau})$ 。故表面温度的精确值为 $T_w(\bar{\tau})=J_0(b)\exp(-b^2\bar{\tau})$ 。这样就可将不同情况下得到的数值解与该精确解作一比较。

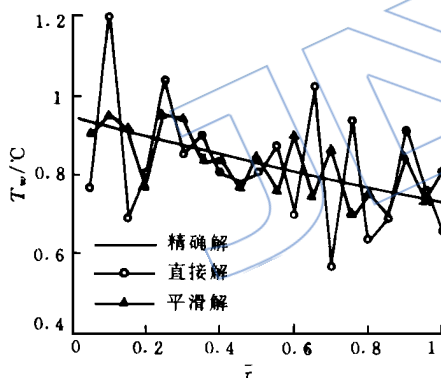


图 1 滑动平滑后的数值解与直接解、精确解的比较

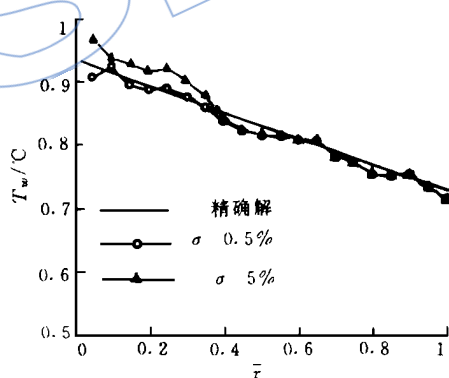


图 2 $\Delta\bar{\tau}=0.05$ 时不同随机误差下的正则解

当实测输入数据有误差时,对(1)~(3)式进行差分离散然后直接求解,往往难以得到稳定而高精度的解。为了模拟中心实测温度的随机误差,在函数 $\varphi(\bar{\tau})$ 上加上一组呈正态分布的随机数,其均值为零,均方差 σ 为 $\varphi(\bar{\tau})$ 最大值的 0.5%(参数 b 取为 0.5)。采用均匀的隐式差分格式,无量纲空间步长 $\Delta\bar{r}$ 与时间步长 $\Delta\bar{\tau}$ 分别取为 0.02 和 0.05。先用模拟实测数据直接差分求解,然后将模拟数据先进行常规的滑动平滑后再求解,结果表明此时的解虽然有显著改善,但仍然有振荡,不够理想。图 1 为效果较好的五点二次抛物线平滑后的数值解及其与直接解、精确解的比较。

如果将这组模拟数据进行正则平滑处理(这时由偏差原理确定的 $\alpha_{\text{opt}}=3.1\times 10^{-5}$),然后再进行数值求解,那么正则解就非常理想,最大相对误差仅为 2%(如图 2 所示)。当反问题输

入数据误差增大时,譬如说均方差 σ 为 $\varphi(\bar{\tau})$ 最大值的 5%, 这时即便采用滑动平滑处理也不能得到反问题的稳定解, 但用正则平滑处理就能得到理想的结果, 精度也依然很好(见图 2)。

如果取 $\Delta\bar{\tau}=0.02$, 这时因为时间步长过小, 直接解已急剧振荡, 但此时的正则解仍很稳定, 精度也较好, 最大相对误差仅为 5.3%, 如图 3 所示(此时 $\alpha_{opt}=7.1\times 10^{-6}$)。前已叙述, 正则参数 α 的选择很重要, 直接关系到平滑的效果和求解的精度, 图 3 中还给出了两个不同 α 下的求解结果。可见, α 过小, 未能充分发挥“正则化”的作用, 结果仍有振荡; α 过大, 稳定性提高, 初始段的解亦非常逼近, 然而到达一定时间后解的精度迅速下降。一般而言, 反问题直接求解时, 无量纲时间步长的下限是 0.04 左右。通过研究表明, 采用正则平滑处理后, $\Delta\bar{\tau}$ 取 0.01 仍能得到稳定的解, 而精度与信息量则显著增加。

另外, 如果对式(1)中的泛函仅仅对其函数本身一致逼近, 即范数 $\|z\|$ 的取值空间 Z 取为一阶 Sobolev 空间 W_2^1 , 则达不到预期的结果, 解的精度与稳定性均不能得到有效地改善。因而, 式(1)中的泛函极小化时, 不仅应对一阶导数而且还应对二阶导数极小化, 才能得到足够光滑的输入函数。

3 结 论

(1)通过对模拟实测数据的处理与求解表明, 对换热反问题输入数据进行正则平滑处理后, 可以显著地提高数值解的精度和稳定性, 并可减小对时间步长的限制。(2)适当地选择正则参数 α 是关键, 最佳正则参数的选择必须基于偏差原理基础之上; 稳定泛函的取值空间也对正则平滑效果有显著影响。(3)求解反问题时, 正则平滑的效果比通常的滑动平滑要好得多, 尤其是实测数据误差较大时更显示出其独特的优点。

参 考 文 献

- 1 Tikhonov A N, Goncharsky A V. Ill-Posed Problems in the Natural Sciences. Moscow: MIR Publishers, 1987
- 2 Beck J V, Blackwell B, Clair C R. Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1985
- 3 Tikhonov A N, Arsenin V Y. Solutions of Ill-Posed Problems. Washington D C: V H Winston & Sons, 1977
- 4 李希靖, 李文军, 陈颖等. 由测温随机过程的一个实现估算数据方差的新方法. 机械工程学报, 1995, 31(4): 31-34
- 5 Langford D. New Analytical Solution of the One-Dimensional Heat Equation for Temperature and Heat Flow Rate Both Prescribed at the Same Fixed Boundary. Quarterly of Appl. 1976, 24(4): 315-322
- 6 周静伟, 程尚模, 李希靖. 一维导热反问题非级数形式的精确 Math 解. 华中理工大学学报, 1996, 24(3): 62-65

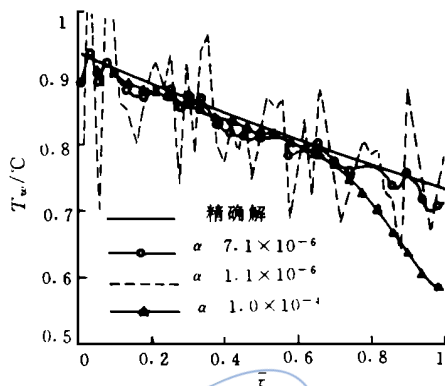


图 3 $\Delta\bar{\tau}=0.02$ 时不同正则参数下的正则解

IMPROVEMENT OF PRESSURE FIELD IN S- SHAPED DIFFUSER AT HIGH INCIDENCE BY VARIABLE LIP

Weng Peifen

(*Shanghai Inst. of Appl. Math. and Mech., Shanghai University, Shanghai 200030*)

Guo Rongwei

(*2nd Dept. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016*)

ABSTRACT

The effects of a variable lip on pressure field in an S- shaped air intake at high angle of attack have been investigated experimentally. The measurements of wall and exit static pressures were made at the range of incidence from 0 ° to 80 ° of lip angle from 0 ° to 50 °. With increasing angle of the variable lip, two effects exist: (1) the incidence seems to reduced, (2) a door with the same effect as auxiliary air intake door (AAID) occurs behind this lip because of its rotation, which allows air flow with a high kinetic energy into the diffuser. The results show that the pressure promotion is obtained in this kind of intake with the help of the variable lip technique.

Key Words Engine inlets Flow distortions Fluidics

REGULARIZATION PROCESSING OF INPUT DATA IN INVERSE HEAT TRANSFER PROBLEM AND ITS INFLUENCE ON THE SOLUTION

Zhou Jingwei and Cheng Shangmo

(*Dept. of Power Eng., Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074*)

Li Wenjun and Li Xijing

(*Engineering Thermophysics Lab., China Institute of Metrology, Hangzhou 310034*)

ABSTRACT

The major difficulty of the inverse problem lies in the fact that its solution does not depend continuously on the data and therefore is ill- posed. Based on Tikhonov's regularization method, a numerical procedure is provided for processing the input data in the inverse heat transfer problem, so that a uniform approximation is obtained both for the data function and its derivative. The effectiveness of the methods illustrated through simulated experiments using inexact data. The results demonstrate that the accuracy and stability of the inverse problem solution are significantly improved. The influence of the time step and the regularization parameter is also investigated. In addition, it is also shown that such a regularizing smooth procedure is obviously superior to the ordinary least square approximate method.

Key Words Heat transfer Regularization Precision Stability

A STUDY ON HORIZONTAL EJECTION CHARACTERISTICS OF EFFERVESCENT ATOMIZERS

Fan Quanlin, Guo Zhihui, Liang Xueping, Xu Hang, Gu Shanjian

(*4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083*)

ABSTRACT

The atomizing and flow field characteristics of a novel type of inject-