

加权变系数的瞬态导热有限元法

北京航空航天大学 杨汇涛** 韩振兴

【摘要】 研究了两点时间差分格式的瞬态导热温度场有限元法数值解的稳定性和振荡现象, 推导出消除振荡的方法: 将时间差分格式的加权系数 σ 与时间步长 Δt 分别和温度振荡联系起来, 得出变 σ 和变 Δt 的函数关系式。实践证明该方法简便易行, 精度高, 节省机时。

主题词: 瞬态状况 导热性 有限元法

分类号: O242.21

1 可变加权系数的两点时间差分格式

瞬态导热有限元法的函数式可归纳为

$$[K]\{T\} + [N]\{\partial T / \partial t\} = \{R\} \quad (1)$$

式中: $[K]$ 温度刚度矩阵, $[N]$ 变温矩阵, $\{T\}$ 温度列阵, $\{\partial T / \partial t\}$ 温度对时间导数的列阵, $\{R\}$ 载荷项。

取插值公式:

$$\sigma \{\partial T / \partial t\}_{i+\Delta t} + (1-\sigma) \{\partial T / \partial t\}_i = \{T_{i+\Delta t} - T_i\} / \Delta t \quad (2)$$

式中 σ 是可自由选择的时间加权系数。

由式(1)推导出 $\{\partial T / \partial t\}_{i+\Delta t}$ 和 $\{\partial T / \partial t\}_i$ 分别代入式(2)可得通用两点时间差分公式:

$$\left[\frac{[N]}{\Delta t} + \sigma[K] \right] \{T\}_{i+\Delta t} = \sigma\{R\}_{i+\Delta t} + (1-\sigma)\{R\}_i + \left[\frac{[N]}{\Delta t} - (1-\sigma)[K] \right] \{T\}_i \quad (3)$$

当取不同的加权系数 σ 时, 可得不同的时间差分格式: 如 $\sigma=0$ 为显式格式, 即 Euler 法; $\sigma=0.5$ 为中心差分格式, 即 Crank-Nicolson 格式; $\sigma=2/3$ 为 Galerkin 格式; $\sigma=1$ 为全隐格式。

为了讨论问题的方便, 取载荷项 $\{R\}=0$, 式(3)可简化为

$$\left[\frac{[N]}{\Delta t} + \sigma[K] \right] \{T\}_{i+\Delta t} - \left[(1-\sigma)[K] - \frac{[N]}{\Delta t} \right] \{T\}_i = 0 \quad (4)$$

若令 $\{T\}_{i+\Delta t} = \lambda \{T\}_i$ 由式(4)可得出

$$\lambda = \frac{1 - (1-\sigma)[K]\Delta t/[N]}{1 + \sigma[K]\Delta t/[N]} \quad (5)$$

$|\lambda| > 1$ 时将会出现“无界”响应, 此时的解是发散的, 若获得收敛解的条件是 $|\lambda| < 1$

$$1 - (1-\sigma)[K]\Delta t/[N] > -1 - \sigma[K]\Delta t/[N]$$

$$[K]/[N]\Delta t(1-2\sigma) < 2 \quad (6)$$

显然 $\sigma \geq 0.5$ 是满足式(6)。 $\lambda < 0$ 时相当于振动的负阻尼, 将会出现振荡性态, 其物理意义是前

一时刻温度低,到了下一时刻温度反而高,违背了传热学规律。

由图 1 可知,只有 $\sigma=1$ 向后差格式即全隐格式, $\lambda > 0$, 不会出现振荡解; $\sigma < 1$ 时, 如 $\sigma=2/3$ 的 Galerkin 格式, $\sigma=0.5$ 的 Crank - Nicolson 格式, 随着 $([K]/[N])\Delta t$ 增大时 λ 会小于 0, 可能出现振荡解, 导致物理意义上的不真实。 $\sigma=0$ 是 Euler 格式, 即显式格式, 只有当 $([K]/[N])\Delta t$ 较小时, $|\lambda| < 1$, 解才能收敛。

文献[1]通过计算实例得出 $\sigma=0.5$ 时属于中心差分, 具有二阶时间精度。稳定时解的精度高, 但在初始阶段产生振荡现象, 造成相对误差大。随着 σ 的增大, 精度下降, 振荡减小。 $\sigma=1$ 时是全隐格式, 能抑制振荡, 但稳定时解的精度只有一阶, 误差大。

文献[2]采用了简单等比序列的变步长计算, 即以一较小的时间步长 Δt_0 作为起始值, 然后每推进一步乘一系数 $A (A > 1)$ 这样步长愈走愈大。

2 构造变系数 σ 和变步长 Δt 的函数

构造时间差分加权系数 σ 的函数, 原则是: 当温度振荡幅度大时, $\sigma \rightarrow 1$ 可抑制振荡, 当温度解趋于稳定时, $\sigma \rightarrow 0.5$ 以获得二阶精度的解。类似于闭环控制的负反馈。

$$\Delta \theta_i = \sum |\theta_{i,n} - \theta_{i,n-1}| / I \quad (7)$$

式中: $\theta_{i,n}$ 表示第 n 时间步上节点 i 的无量纲温度值, I 是总节点数。据经验, 作者构造了

$$\sigma_n = \begin{cases} 2.5 \cdot \Delta \theta_{n-1} + 0.5 & 0 \leq \Delta \theta_{n-1} \leq 0.2 \\ 1 & 0.2 < \Delta \theta_{n-1} \leq 1 \end{cases} \quad (8)$$

其 σ_n 随 $\Delta \theta_{n-1}$ 的变化如图 2 所示。

文献[2]采用简单等比序列变步长, 没有考虑温度变化对步长的影响, 为此作者构造变步长:

$$\Delta t_n = A \cdot \Delta t_{n-1} \cdot e^{-|\Delta \theta_{n-1}|} \quad (9)$$

当温度变化大时, 即 $\Delta \theta_{n-1}$ 大, 步长 Δt_n 可取小一些, 当温度变化平坦时, Δt_n 可取大一些。

3 数值分析实例

分别取时间加权系数 $\sigma=0.5$ Crank - Nicolson 格式, $\sigma=2/3$ Galerkin 格式, $\sigma=1$ 全隐格式和变系数法 σ_n , 对第一类边界条件无限大平板进行了定步长计算, 时间步长取傅里叶准则 $\Delta F_0 = \alpha \Delta t / l^2 = 0.125$, 某节点无量纲温度随时间变化经三次样条处理后见图 3。

由图 3 可见: 当时间步长较大时, $\sigma=0.5$ Crank - Nicolson 格式振荡较大; $\sigma=2/3$ Galerkin 格式振荡较小, 它们的初始误差大。 $\sigma=1$ 全隐格式没有振荡但稳定后精度只有一阶。变系数法抗振荡性能强, 稳定后是时间二阶精度。

作者也用了温度修正的时间变步长方法, 对第一类边界条件加热问题进行计算, 内部某节点温度随时间变化如图 4 所示, 图 4(a) 是定步长, 时间步长取傅里叶准则为 0.01, 计算了 1000

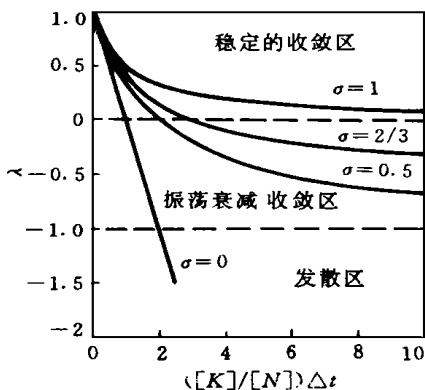


图 1 当 σ 不同时 λ 随 $([K]/[N])\Delta t$ 的变化曲线

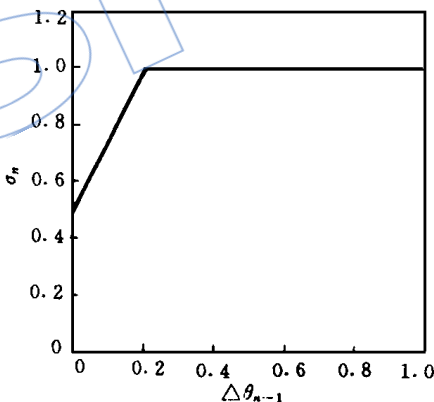


图 2 σ_n 与 $\Delta \theta_{n-1}$ 的函数关系曲线

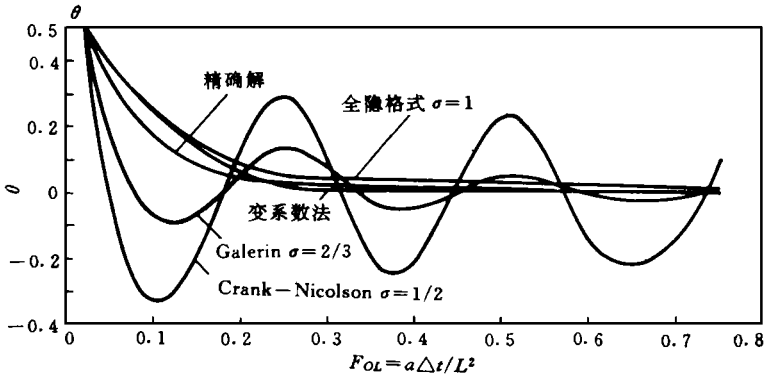


图 3 定步长变时间加权系数法与其他格式的比较

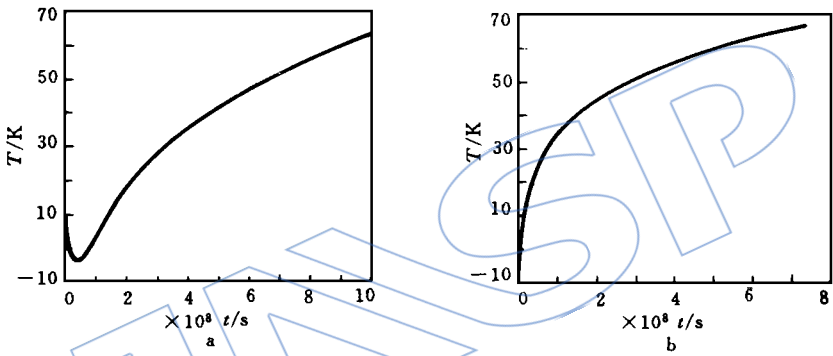


图 4 定步长与温度修正变步长计算的比较

个时间步长,且在初始阶段出现了振荡;图 4(b) 采用 $\Delta t_n = A \cdot \Delta t_{n-1} \cdot e^{-|\Delta \theta_{n-1}|}$ 其中第一时间步长也取傅里叶数 0.01, A 取 2.3, 只计算了 70 步。

结论 采用变系数 σ_n 进行瞬态导热有限元法计算,能有效地抑制振荡,提高精度。实践证明该方法简便易行。温度修正的时间变步长计算,即 $\Delta t_n = A \cdot \Delta t_{n-1} \cdot e^{-|\Delta \theta_{n-1}|}$ 能显著节省机时,抑制振荡,提高精度。

参 考 文 献

1 朱谷君,冀守礼,杨帆. 导热温度分布的有限元分析及瞬态计算的递归公式. 航空动力学报, 1989, 4(4)
2 孔祥谦. 有限元法在传热中的应用. 北京: 科学出版社, 1986
3 饶寿期. 有限元法及边界元基础. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1980

(责任编辑 杨再荣)

PREDICTION OF AEROENGINE FLIGHT LOAD SPECTRUM

Song Yingdong

(2nd Dept. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

ABSTRACT

A method of aeroengine flight load spectrum prediction is developed, which uses principles of aircraft flight mechanics to turn aircraft design mission profiles into engine thrust profiles. Flight altitude and flight velocity are acquired by solving the aircraft motion equations with the aircraft motion constraints. In the result of the engine performance calculations, the other engine operating parameters can be obtained. In the flight process from take-off to landing, taking the final value of the previous operation as the initial value of the following one, the engine flight load spectrum can be calculated for a specific flight mission. As an example, the flight load spectrum of an engine used on a trainer has been calculated.

Key Words Aircraft engines Loading Spectrum Prediction technique

EFFECTS OF POROSITY AND OSMOTIC OIL FLOW ON FLAME STABILITY OF CERAMIC EVAPORATION CAVITY

Sun Huixian, Du Shengtong, Ma Xuiesong, et al

(7th Dept. Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

ABSTRACT

A series of experiments of flame stability in ceramic evaporation cavity with different porosity at different osmotic oil flow rate have been completed in a model afterburner. Experimental results show that, in the case of the main oil supply only or with osmotic oil supply, there is an optimal porosity respectively, where extinction limit of lean poor mixed gas is the widest, with the osmotic oil supply only, flame extinction limit of ceramic holder becomes wider as the porosity increases. Concerning the effect of the osmotic oil flow rate on the flame stability, the extinction limit becomes extended usually as the osmotic oil flow rate increases.

Key Words Ceramic composites Evaporation Flame stabilization

A FINITE ELEMENT ANALYSIS OF TRANSIENT HEAT CONDUCTION WITH WEIGHTED VARIABLE FACTOR

Yang Huitao and Han Zengxin

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT

The stability and oscillation of numerical finite element solution of transient conduction temperature field with two-point time difference scheme have been investigated. The weighted factor of the time difference scheme σ and the time step Δt are correlated to the temperature oscillation respectively. Thus the functions of variable σ and Δt are obtained. Its application demonstrates the simplicity in programming, high accuracy and economy of running time.

Key Words Transient behaviour Heat conduction Finite element methods