

重特征值模态灵敏度分析 的非线性摄动法

西北工业大学 崔博文* 沈允文

【摘要】 利用非线性摄动等式, 推导了实对称矩阵的重特征值模态灵敏度计算公式。该方法的优点是保持了原特征系统矩阵的对称性和带宽。数值算例表明该方法精度高, 易于计算和实施。

主题词: 特征值 模态分析 摄动法

分类号: O 241. 6

最近, Ojalvo^[1], Mills Curran^[2]和 Dailey^[3]等推广了 Nelson^[4]的方法。但他们在求系数矩阵时忽略了二阶摄动项, 这势必影响其结果准确性。陈^[5]文提出了一个改进方法, 但并未论及系数矩阵的求法。Kim^[6]虽则考虑了二阶摄动项, 但在求解过程中却采用分块矩阵法。但是正如作者所述, 当重特征值数较大时这种方法可能失效。本文在前述作者方法基础上, 考虑二阶摄动项, 利用非线性摄动等式进行求解。

1 理论基础

实对称矩阵的特征问题为:

$$(K - \lambda M)x = 0 \quad (1)$$

$$x^T M x = 1 \quad (2)$$

式中: K, M 为结构刚度矩阵、质量矩阵; λ, x 为特征值及对应的特征向量。

设特征值问题有 m 重特征值 λ_i , 即 $\lambda_i = \lambda_2 \cdots = \lambda_m = \lambda$ 相应的特征向量为 $x_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 。令 $X = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_m]$, 那末相应于重特征值的特征值问题可表示为:

$$KX = MX\Lambda \quad (3)$$

$$X^T M X = I \quad (4)$$

式中 $\Lambda = \Lambda \in R^{m \times m}$ 。由于 X 不唯一, 可能使得 X 不连续且不可导, 因而其特征向量的导数可能不存在。为获取特征向量导数, 必须获得满足式(3), (4)且连续可导的特征向量(表示为 Z)。由于 Z 和 X 都满足式(3), (4), 因而必定存在一正交变换矩阵 $A \in R^{m \times m}$ 使下式成立

$$Z = XZA \quad X \in R^{n \times m} \quad (5)$$

当结构某参数 p 发生小变化时, 结构质量阵 M 和刚度阵 K 均发生变化。设 M 和 K 的变量分别为 ΔM 和 ΔK , 这时的特征值问题为:

$$(K + \Delta K)(Z + \Delta Z) = (M + \Delta M)(Z + \Delta Z)(\Lambda + \Delta \Lambda) \quad (6)$$

式中: $\Delta\Lambda$ 和 ΔZ 分别表示对应于参数 p 变化后的特征值和特征向量的变化量。

将式(6)展开, 取掉高阶摄动项后有:

$$(K - \lambda M) \Delta Z = (\lambda \Delta M - \Delta K) Z + M Z \Delta \Lambda \quad (7)$$

式(7)前乘 X^T , 并将 $Z = XA$ 代入, 注意到 $X^T(K - \lambda M) = 0$, 于是可得到下式:

$$X^T(\lambda \Delta M - \Delta K)XA + X^T M X A \Delta \Lambda = 0 \quad (8)$$

令 $D = X^T(\Delta K - \lambda \Delta M)X$, 则式(8)可表示为:

$$DA = A \Delta \Lambda \quad (9)$$

式(9)是一个简单的特征值问题。由于特征值的重数 m 远小于总自由度数 n , 因而从式(9)可很容易获得 $\Delta\Lambda$ 和 A , 进而可获得相应于重特征值 λ 的特征向量 $Z = XA$ 。

利用推广了的 Nelson 方法^[1], 假定对应于参数 p 变化的特征向量的变化量 ΔZ 具有:

$$\Delta Z = V + ZC \quad (10)$$

式中: C 为系数矩阵 $\in R^{m \times m}$ 。为求解矩阵 V , 将式(10)代入式(7), 并定义 $G = K - \lambda M$, $F = (\lambda \Delta M - \Delta K)Z + M Z \Delta \Lambda$, 这时有:

$$GV = F \quad (11)$$

因矩阵 G 为一奇异阵, 其秩为 $(n - m)$ 。因而方程(11)为一奇异线性方程组。该方法的求解可参见文献[1]。

为便于说明, 式(10)可变化为: $\Delta Z_i = v_i + \sum_{k=1}^m C_{ki} Z_k$ (12)

同样对应的特征问题(6)可表示为:

$$[(K + \Delta K) - (\lambda + \Delta\lambda)(M + \Delta M)](z_i + \Delta z_i) = 0 \quad (13)$$

展开式(13), 考虑到 $(K - \lambda M)z_i = 0$, 可得下式:

$$(K - \lambda M) \Delta z_i + (\Delta K - \lambda \Delta M)(z_i + \Delta z_i) - \Delta\lambda(M + \Delta M)(z_i + \Delta z_i) = 0 \quad (14)$$

把式(12)代入式(14), 并前乘 z_k^T , 并略去三阶摄动项可得到下式:

$$C_{ki} = \frac{z_k^T(\Delta K - \lambda \Delta M)(z_i + v_i) - \Delta\lambda z_i^T M v_i - \Delta\lambda z_i^T \Delta M z_i}{\Delta\lambda - \Delta\lambda} \quad (k \neq i) \quad (15)$$

当 $k = i$ 时, 考虑到质量正交性有:

$$(z_i + \Delta z_i)^T (M + \Delta M) (z_i + \Delta z_i) = 1 \quad (16)$$

展开式(16), 略去高阶摄动项后有:

$$\Delta z_i^T M z_i + z_i^T M \Delta z_i + z_i^T \Delta M z_i = 0 \quad (17)$$

把式(12)代入式(17)后, 并化简可得到:

$$C_{ii} = - (1/2) (v_i^T M z_i + z_i^T M v_i + z_i^T \Delta M z_i) \quad (18)$$

求得矩阵 V 及系数矩阵 C 后, 可利用式(10)求得重特征值的特征向量的变化量 ΔZ 。

设 ΔK 和 ΔM 表示由于结构参数 p 变化 Δp 而产生的刚度矩阵和质量矩阵的增量。 $\Delta\lambda$ 和 $\{\Delta z_i\}$ 为特征值和特征向量的增量, 系统振动的特征值和特征向量的导数可近似表示为:

$$\lambda' = \Delta\lambda / \Delta p, \quad z_i' = \Delta z_i / \Delta p \quad (19)$$

2 数值算例

以两个 8 自由度梁单元组成的方形悬臂梁(图 1)作为本文方法的应用。取梁横截面 y 方

向尺寸 h 为设计变量 p , 位移向量取为:

$$q = [v_1, w_1, \theta_{y1}, \theta_{x1}, v_2, w_2, \theta_{y2}, \theta_{x2}]^T \quad (20)$$

悬臂梁的总刚度矩阵 K_9 和总质量矩阵 M_9 分别为:

$$K_9 = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} \frac{hb^3}{L} & 0 & 0 & \frac{hb^3}{2L} & -\frac{hb^3}{L^2} & 0 & 0 & \frac{hb^3}{2L} \\ \frac{bh^3}{L^2} & -\frac{bh^3}{2L} & 0 & 0 & -\frac{bh^3}{L^2} & -\frac{bh^3}{2L} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}bh^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}bh^3 & \frac{1}{6}bh^3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}b^3h & -\frac{b^3h}{2L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}hb^3 & 0 \\ \frac{2b^3h}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2bh^3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4}bh^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4}b^3h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$M_9 = \frac{\rho bhL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22L & 54 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 156 & -22L & 0 & 0 & 54 & 13L & 0 \\ 0 & -22L & 4L^2 & 0 & 0 & -13L & -3L^2 & 0 \\ 22L & 0 & 0 & 4L^2 & 13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & 13L & 312 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & -13L & 0 & 0 & 312 & 0 & 0 \\ 0 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 8L^2 & 0 \\ -13L & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

式中: E 为杨氏模量, L 为梁的长度, ρ 为质量密度, h 和 b 分别为横截面尺寸 (见图 1)。

运用矩阵理论^[7], 可获得 K_g 和 M_g 对尺寸 h 的偏导矩阵 K'_g 和 M'_{g0} 。当结构尺寸 h 发生小变化 Δh 时的刚度矩阵和质量矩阵的变化阵可分别表示为:

$$\Delta K_g = K'_g \cdot \Delta h = (\partial K_g / \partial h) \Delta h \quad (23)$$

$$\Delta M_g = M'_g \cdot \Delta h = (\partial M_g / \partial h) \Delta h \quad (24)$$

为便于计算, 令 $b = h = 10$, $\rho = 4.2$, $L = 1$, $E = 1000$ 。由于结构关于 y - z 对称, 求解特征问题 $K_g X = \lambda M_g X$ 可得到四对重特征值, 2730.38; 61405.83; 772445.82; 5997738.62。当 $\Delta h = 0.001$ 时, 分别用文

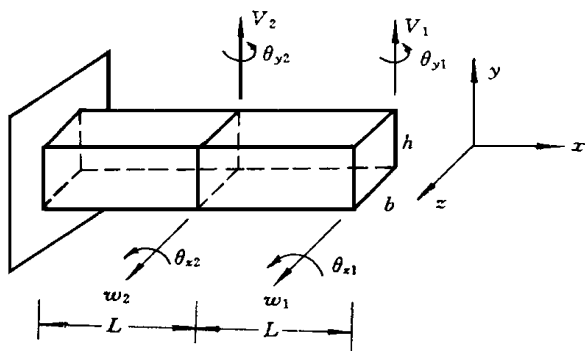


图 1 方形悬臂梁

献所述方法和本文方法计算了最低阶重特征值的导数及其对应的特征向量导数,并用差分法检验本文方法计算精度。摄动矩阵为 $K_p=K_g+0.001K_g'$, $M_p=M_g+0.001M_g'$,求解 $K_pX_p=M_pX_p\Lambda_p$ 特征问题,满足约束条件 $X_p^T M_p X_p=I$ 。并令 $Z'=(X_p-Z)/0.001$, $\Lambda'=(\Lambda_p-\Lambda)/0.001$ 。计算结果见表 1。

表 1 文献方法、本文方法及差分法所得结果比较

重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2730.38$										
特征值 导数	Ojalvo 方法		Mills 方法		Dailey 方法		本文方法		差分方法	
	8949.54	9371.27	8949.54	9371.27	8949.54	9371.27	8949.54	9371.27	8949.96	9829.87
特征 向量 导数	- 0.00349	0	- 0.00350	0	- 0.00349	0	- 0.00349	0	- 0.00350	0
	0.00014	- 0.0050	0.00014	- 0.0050	0.00014	- 0.0050	0	- 0.0050	0	- 0.00497
	0.00010	- 0.0245	0.00010	- 0.0245	0.00010	- 0.0245	0	- 0.0245	0	- 0.02449
	0.01303	0	0.01310	0	0.01303	0	0.01303	0	0.01304	0
	- 0.00327	0	- 0.00327	0	- 0.00327	0	- 0.00327	0	- 0.0316	0
	0.00005	0.00542	0.00049	0.00542	0.00005	0.00542	0	0.00542	0	0.00566
	0.00007	0.00715	0.00007	0.00715	0.00007	0.00715	0	0.00715	0	0.00724
	- 0.00182	0	- 0.00181	0	- 0.00182	0	- 0.00182	0	- 0.00178	0

由表 1 结果比较可知,文献所述方法由于在计算特征向量导数时忽略二阶摄动项,精度较低,而本文方法则具有良好的计算精度。

3 结 论

本文提出的计算重特征值模态灵敏度的新方法修正了 Ojalvo^[1], Kim^[6]等人方法存在的缺陷。利用非线性摄动等式并考虑二阶摄动项进行模态灵敏度计算,保证了计算精度。除需要求解一低阶特征值问题外,本文方法仅需要进行矩阵乘法运算及解一高维线性方程组。由于本文方法保持了矩阵 M 和 K 的对称、带宽及稀疏性,因而线性方程组的求解效率很高。本文方法特别适合于结构刚度矩阵和质量矩阵不能表示为某结构参数 p 的显式函数时的情形。通过模态灵敏度可方便地进行结构动力修改,以使结构具有良好的动态特性。当重特征值的变化(或导数)仍重复时,本文方法会失效。有关这方面的问题将在以后再进行深入研究。

参 考 文 献

1 Ojalvo I U. Efficient Computation of Modal Sensitivities for System sw ith Repeated Frequencies A IAA Journal, 1988, 26 (3): 361- 366

2 Mills- Curran W C. Calculation of Eigenvector Derivatives for Structure w ith Repeated Eigenvalues A IAA Journal, 1988, 26(7): 867- 871

3 Dailey R L. Eigenvector Derivatives w ith Repeated Eigenvalues A IAA Journal, 1989, 27(4): 486- 491

4 Nelson R B. Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives A IAA Journal, 1976, 14(Sept): 1201- 1205

5 陈塑寰,宋大同,韩万芝 重特征值的特征向量导数计算的新方法 机械强度, 1995, 17(2): 43- 47

6 Kim K O, Wallerstein D V. Modal Design Sensitivities for Multiple Eigenvalues Comput Struct 1988, 29: 755- 762

7 程云鹏 矩阵论 西北工业大学出版社, 1989

(责任编辑 杨再荣)

tion rate was given by Arrhenius model. The results show that the numerical method and physical models are proper for simulation of spray combustion processes.

Key Words Spray combustion flow Calculation Algorithm

AN EXPERIMENTAL STUDY ON PRIMARY NOZZLE TYPES OF EXHAUST EJECTOR SYSTEMS

Li Li, Xu Zhiyong, Wu Shousheng

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT Optimum distances between primary nozzle exit and mixing tube inlet, static pressure recovery of the mixing flow in mixing tube, total pressure distributions at the exit of mixing tube, pumping coefficients and total pressure losses of the exhaust ejector systems with four different types of primary nozzles have been measured in the experiments. The results have an important reference value for selecting primary nozzle types of exhaust ejector systems.

Key Words Nozzle with injector Aerodynamic tests Experiments

TECHNICAL NOTES

NONLINEAR PERTURBATION METHOD FOR ANALYSIS OF MODAL SENSITIVITIES WITH REPEATED EIGENVALUES

Cui Bowen and Shen Yunwen

(7th Dept. Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

ABSTRACT An algorithm was made out for analyzing the modal sensitivities with repeated eigenvalues of real symmetric matrices by means of nonlinear perturbation equation. It has advantage in retaining the symmetry and band structure of the original eigen-system matrices. A numerical example shows that the method has high accuracy and can be easily implemented on computer.

Key Words Modal analysis Eigenvalues Perturbation method

TRANSIENT RESPONSES OF BLADES TO BIRD IMPACT COUPLED WITH DEFORMATIONS OF BLADE

Chen Wei, Qi Wenkai, Gao Deping

(2nd Dept. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

ABSTRACT It is necessary to calculate the transient responses of blades precisely in analysis of blade damage due to bird impact. Because the deformations of blade can