

转子—齿轮联轴器系统的 弯扭耦合振动研究*

西安交通大学 李 明** 张 勇 姜培林 虞 烈

【摘要】 根据内齿轮副的啮合条件和拉格朗日方程,在旋转坐标系中建立了转子—齿轮联轴器系统的弯扭耦合振动方程。对方程进行数值积分求解,结果表明,对于对中良好的轴系,弯扭耦合与弯扭解耦时其瞬态响应的低阶频率值非常接近;对于不对中轴系,弯扭耦合会产生偶数倍频的弯曲振动分量和奇数倍频的扭转振动分量。

主题词: 转子 齿轮 联轴器 振动

分类号: TH 113

1 前 言

在文献[1, 2]中,均采用了几个基本假设,其中之一是“联轴器各内外齿承载相同”,这个条件隐含了这样一个事实:内齿套轴线和外齿轮轴线是对中的。而在实际工程中存在着不对中或者对中不良的情形,在不对中时,只有在啮合线上的齿对才接触^[3],因此只有少数几个齿对承载。在某些情况下,即使对中良好,由于齿形或啮合的误差也会发生上述情况,文献[4]分析了齿轮联轴器轮齿的误差后得出了一套计算公式,通过计算可知,当模数为 3,齿数等于 56 时,其极限情况只有不到 4 对齿接触。工程实际的分析和试验^[2, 5, 6]表明:一些采用齿轮联轴器连接的转子系统会程度不同地产生倍频的振动分量,而这一分量的出现正是齿轮联轴器不对中的典型特征,因此有必要进行相应的分析。本文根据内齿轮副的啮合条件和拉格朗日方程,在旋转坐标系中建立了转子—齿轮联轴器系统的弯扭耦合振动方程。最后进行了数值计算、频谱分析和相应的讨论。

2 渐开线直齿内齿轮副啮合关系分析

设 $S_i(O_i x_i y_i z_i)$ 坐标系是与内齿套固连的动坐标系, x_i 轴与内齿套某一齿的一侧齿形相交于基圆(半径为 r_b)上, z_i 轴与内齿套轴线重合, O_i 为坐标原点。设 $S(oxyz)$ 坐标系为固定坐标系,如图 1 所示。二坐标系之间的关系为:

$$x = x_i \cos(\gamma + \theta) - y_i \sin(\gamma + \theta) + x_{ji}, y = x_i \sin(\gamma + \theta) + y_i \cos(\gamma + \theta) + y_{ji} \quad (1)$$

在动坐标系中,渐开线直齿齿面上任意一点 P 的齿面方程(内齿套)为:

$$x_i = r_b (\cos \gamma_i + \gamma_i \sin \gamma_i) \quad , \quad y_i = r_b (\sin \gamma_i - \gamma_i \cos \gamma_i) \quad (2)$$

式中 $\gamma_i = \alpha + \beta_i$, r_b 为基圆半径。将(2)式代入(1)式得:

$$\begin{cases} x = r_b [\cos(\gamma_i + \theta + \gamma) + \gamma_i \sin(\gamma_i + \theta + \gamma)] + x_{ji} \\ y = r_b [\sin(\gamma_i + \theta + \gamma) - \gamma_i \cos(\gamma_i + \theta + \gamma)] + y_{ji} \end{cases} \quad (3)$$



图1 啮合关系分析

在 $S(oxyz)$ 坐标系中, 内齿套齿面上 p 点的法线向量和速度分别为:

$$\vec{n} = \{r_b \gamma_i \sin(\theta + \gamma_i + \gamma), -r_b \gamma_i \cos(\theta + \gamma_i + \gamma), 0\} \quad (4)$$

$$\vec{V}_p = \{\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p\} \quad (5)$$

$$\text{式中} \begin{cases} \dot{x}_p = r_b [-(\dot{\theta} + \dot{\gamma}) \sin(\theta + \gamma_i + \gamma) + \gamma_i \cos(\theta + \gamma_i + \gamma) (\dot{\gamma}_i + \dot{\theta} + \dot{\gamma})] + \dot{x}_{ji} \\ \dot{y}_p = r_b [(\dot{\theta} + \dot{\gamma}) \cos(\theta + \gamma_i + \gamma) + \gamma_i \sin(\theta + \gamma_i + \gamma) (\dot{\gamma}_i + \dot{\theta} + \dot{\gamma})] + \dot{y}_{ji} \\ \dot{z}_p = 0 \end{cases}$$

同理可得出外齿轮上 p 点的法线向量和速度, 根据啮合条件可得:

$$(\theta_i - \theta_e)^2 = [(x_{ji} - x_{je})^2 + (y_{ji} - y_{je})^2] / r_b^2 \quad (6)$$

其中: 下标 i 和 e 分别表示内齿套和外齿轮。

设 β 角是连心线与 x 轴之间的夹角, 则: $\cos \beta = (x_{ji} - x_{je}) / A$, $\sin \beta = (y_{ji} - y_{je}) / A$

其中: $A = \sqrt{(x_{ji} - x_{je})^2 + (y_{ji} - y_{je})^2}$ 为两轮中心距。

3 半联轴器系统的运动微分方程

如图2所示的半联轴器是整体系统的一个子系统, 下面以此为例来说明系统方程的建立

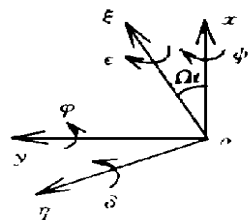
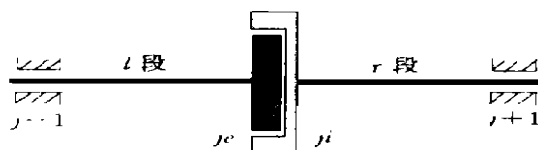


图2 半联轴器系统和坐标系

过程, 设 $S(o\xi\eta)$ 为旋转轴系, 旋转轴系与固定轴系的变换关系为:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{jk} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (k = i, e) \quad (7)$$

如果将(6)式变换到旋转坐标系 $o\xi\eta$ 中, 则得:

$$r_b^2 (\theta_i - \theta_e)^2 = (\xi_i - \xi_e)^2 + (\eta_i - \eta_e)^2 \quad (8)$$

$$\text{设 } \cos \beta_R = \frac{\zeta_{ji} - \zeta_{je}}{\sqrt{(\xi_{ji} - \xi_{je})^2 + (\eta_{ji} - \eta_{je})^2}} \quad \sin \beta_R = \frac{\eta_{ji} - \eta_{je}}{\sqrt{(\xi_{ji} - \xi_{je})^2 + (\eta_{ji} - \eta_{je})^2}}$$

β_R 表示在旋转轴系中, 内外轮中心连线与 ξ 轴之间的夹角。从而得 $\beta_R = \beta - \Omega t$

圆盘的运动可分解成随其质心的平动和绕质心的转动。对于上述子系统的动能包括内外齿轮的平动动能和转动动能:

$$\begin{aligned} T = \sum_{k=i,e} \frac{1}{2} \{ & m_{jk} [\dot{\xi}_{jk}^2 + \dot{\eta}_{jk}^2 + \Omega^2 (\xi_{jk}^2 + \eta_{jk}^2) + 2\Omega (\dot{\eta}_{jk} \xi_{jk} - \dot{\xi}_{jk} \eta_{jk})] \\ & + J_{jk}^d [(-\dot{\epsilon}_{jk} \cos \delta_{jk} - \Omega \cos \epsilon_{jk} \sin \delta_{jk})^2 + (\dot{\delta}_{jk} - \Omega \sin \epsilon_{jk})^2] \\ & + J_{jk}^z [(\Omega + \dot{\theta}_k) \cos \epsilon_{jk} \cos \delta_{jk} - \dot{\epsilon}_{jk} \sin \delta_{jk}]^2 \} \end{aligned} \quad (9)$$

式中: m 为齿轮的质量, J^d 和 J^z 分别为齿轮的极转动惯量和赤道转动惯量。

子系统的弹性势能(包括左右轴段的弹性势能和半联轴器的弹性势能)为:

$$U = U_l + U_r + (1/2) K_c (\theta_i - \theta_e)^2 \quad (10)$$

式中: U_l 和 U_r 分别表示左右轴段弯曲和扭转弹性势能之和, K_c 为联轴器轮齿的扭转刚度系数。

子系统的耗散函数:

$$\tilde{R} = \frac{1}{2} c_l (\dot{\delta}_i - \dot{\delta}_e)^2 + \frac{1}{2} c_l (\dot{\eta}_i - \dot{\eta}_e)^2 + \frac{1}{2} c_a (\dot{\delta}_i - \dot{\delta}_e)^2 + \frac{1}{2} c_a (\dot{\epsilon}_i - \dot{\epsilon}_e)^2 \quad (11)$$

式中: c_l 和 c_a 分别为齿轮联轴器的横向阻尼系数和转角阻尼系数。

将约束关系(8)式代入系统的动能、势能表达式中, 消去多余的变量 θ_i 并代入拉氏方程, 略去高阶小量后, 即得系统的运动微分方程。由于方程冗长, 在此略去。但从式(8)可以看出, 系统的弯曲振动和扭动振动在齿轮联轴器的啮合处是耦合在一起的。

对于转子系统的弯曲和扭转振动来说, 以往在分析时往往把二者分割开来, 原因是用来表征它们运动的广义坐标是解耦的, 但在大型的轴承—转子系统中, 一般弯曲振动和扭转振动同时存在, 在加入了齿轮联轴器之后, 系统的弯曲振动和扭转振动就耦合起来了。由约束方程和动能、势能的表达式可知, 系统方程不仅出现弹性耦合, 而且会出现惯性耦合。如果在式(11)中考虑了齿轮联轴器的扭转内阻尼, 那么阻尼项一定也会出现弯扭耦合的现象。以上的方程只在 β_R 变化较小时, 可近似为线性方程来处理, 一般情况下是非线性的。如果轴线间具有静不对中量, 则可通过坐标变换再代入系统方程中, 即可得到相应的运动微分方程。

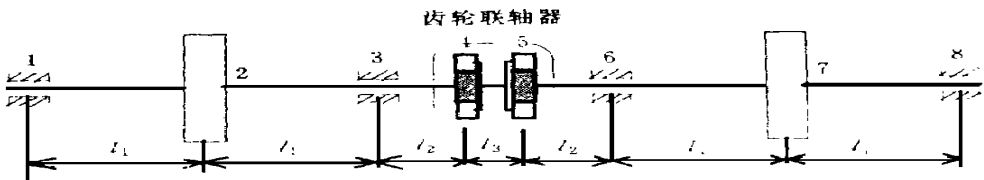


图3 轴承—转子—齿轮联轴器系统图

对于如图3所示的实际转子系统, 通常包含有二个半联轴器, 约束方程为:

$$\begin{cases} r_b^2 (\theta_{4i} - \theta_{4e})^2 = (\xi_{4i} - \xi_{4e})^2 + (\eta_{4i} - \eta_{4e})^2 \\ r_b^2 (\theta_{5i} - \theta_{5e})^2 = (\xi_{5i} - \xi_{5e})^2 + (\eta_{5i} - \eta_{5e})^2 \end{cases} \quad (12)$$

考虑了二个半联轴器后,耦合关系将变得更为复杂。以上建立了在齿轮联轴器处的运动微分方程,对于其他各结点处的运动方程由于弯扭解耦,故可较简单地直接写出,这样就建立了转子—齿轮联轴器系统的运动方程。对于图 3 系统,只要在结点 1, 3, 6 和 8 处加入相应的 8 个油膜刚度和阻尼系数(应变换到旋转坐标系中),就可得到轴承—转子—齿轮联轴器整体系统的运动微分方程。图 3 由一齿轮联轴器连接的二个 Jeffcott 转子组成的系统,共有 48 个自由度。

4 非线性数值计算

计算模型见文献[1],工作转速为 3000 r/min。计算时采用无量纲化,具体过程从略^[7]。数值计算方法采用加权残值直接积分法^[8]。计算步骤如下:(1)无静不对中时,在横向冲击作用下不平衡转子的瞬态响应计算和频谱分析,结果见图 4(a)。(2)具有静不对中时,平衡转子的瞬态响应计算和频谱分析,图 4(b)为弯曲振动,图 4(c)为相应的扭转振动。

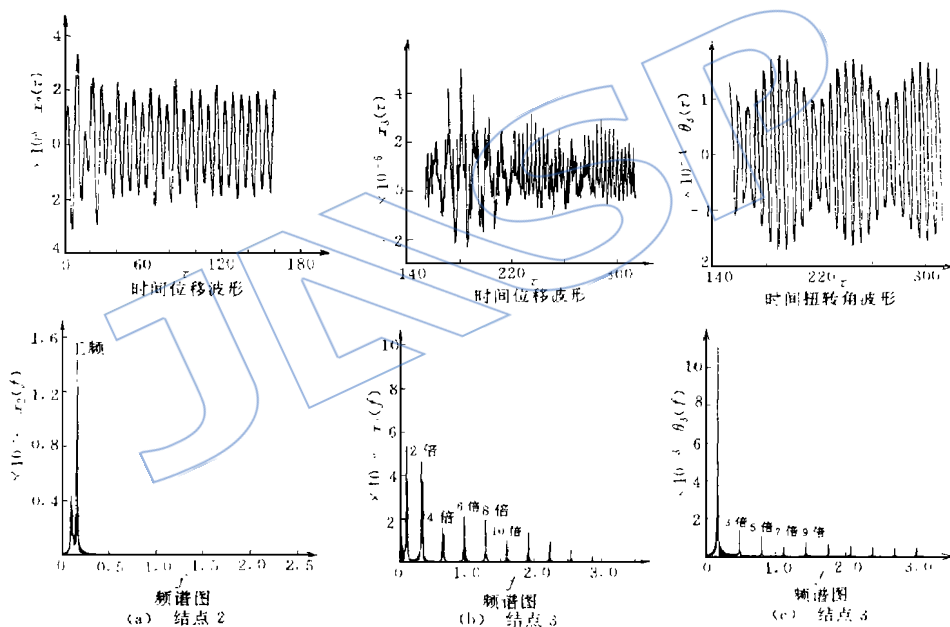


图 4 工作转速下的响应曲线和相应的频谱图

(注:本文的不平衡指圆盘具有质量偏心而引起的惯性力。图 4(a)和(b)的响应曲线已变换到固定坐标系中。)

5 分析及讨论

图 4 所示只是其中典型的几种振动响应曲线。从图 4(a)可见,系统的不平衡响应在瞬态阶段主要由低阶的衰减振动频率和工频组成,而此衰减的频率值与在弯扭解耦时弯曲振动的第一阶固有频率值非常接近^[1],适当改变系统的结构参数,上述结论仍然存在;除了这二个频率外其他的频率成分很小,可以想象,当轴承的阻尼不足,而系统又存在各种不稳定因素时,系

统会在低频处发生自激振动。大量计算还发现,仅考虑弯曲振动时,在线性的解耦模型中,系统的前几阶固有频率都能在弯扭耦合后的振动中表现出来,但耦合后的振动频率更为丰富。从图 4(b) 明显可见,横向位移响应包含着工频的 2, 4, 6, …等偶数倍频分量。这一偶数倍频振动分量正是齿轮联轴器具有不对中时典型的故障特征。并在一些实验中得到证实^[2, 5, 6]。图 4(c) 显示了此时的扭转振动具有 1, 3, 5, …等奇数倍频振动分量。而且这些倍频振动分量是由内齿套的惯性力和齿轮联轴器的内阻尼共同作用的结果。文献[9]指出由于不对中会引起齿轮联轴器内齿套的惯性力,该力产生 2 倍频的弯曲振动,并以此作为不对中故障诊断的判据。实际上转子的横向裂纹、径向摩擦等故障也都会引起转子 2 倍频等的振动分量,因此本文的这一结果能为这类转子系统的故障提供更为详细的诊断信息。由于上述倍频分量的存在,使得在系统设计时除了要考虑系统发生主共振外还要考虑发生谐波共振的可能性。

6 结 论

在具有齿轮联轴器的转子系统中,弯曲振动和扭转振动是耦合的;在齿轮联轴器对中良好时,弯扭耦合后与解耦情形^[1],其弯曲振动瞬态响应的低阶频率值非常接近;在齿轮联轴器具有静不对中时,弯扭耦合振动会产生偶数倍频的弯曲振动分量和奇数倍频的扭转振动分量,而且这些倍频振动分量是由内齿套的惯性力和齿轮联轴器的内阻尼共同作用的结果。这一振动特征可以为故障诊断提供更为详细的诊断信息。

参 考 文 献

- 1 李明,姜培林,虞烈. 轴承—转子—齿轮联轴器系统的振动研究. 机械工程学报, 1998, 34(3): 39- 45
- 2 Mammol R A. Spline Coupling Induced Nonsynchronous Rotor Vibrations. ASME Journal of Mechanical Design, 1980, 102(1): 168- 176
- 3 冯澄宙. 渐开线少齿差行星传动. 北京: 人民教育出版社, 1982
- 4 Shigeo NAWATE, Yoshio TERAUCHI. Number of Teeth in Contact and Load Capacity of Gear- Type Shaft Coupling. JSME International Journal, 1995, 38(1): 106- 111
- 5 Bachschmidt N, Curami A, Petrone F. Vibrational Behaviour of Rotors with Gear Couplings in Case of Insufficient Coupling Lubrication. Proc. of the International Conference on Rotor Machine Dynamics, April 28- 30, 1992: 232- 239
- 6 孙义冈, 陈耿, 李伟华. 齿套联轴器对轴系振动的影响. 动力工程, 1991, 11(6): 21- 24
- 7 虞烈. 轴承—转子系统的稳定性与振动控制研究. [博士论文]. 西安交通大学, 1987
- 8 凌复华等. 常微分方程数值方法及其在力学中的应用. 重庆: 重庆大学出版社, 1990
- 9 韩捷. 齿式联接不对中转子的故障物理特性研究. 振动工程学报, 1996, 9(3): 297- 301

(责任编辑 王震华)

clude two rise and fall profiles, a maneuver profile and a high cycle fatigue test spectrum.

Key Words Trainer Aircraft engines Accelerated test

REGULATION BEHAVIOR ANALYSIS OF AUTO- EVEN- LOAD CONNECTING COMPONENT

Du yanliang, Zhao Weigang, Liu Xiandong, Zhu Xinqun
Ma Liming, Hao Huazhen, Zhang Zuping

(Dept of Mechanical Eng. Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043)

ABSTRACT According to the deformation or fracture caused by uneven loads on the structural connection, the smart structure with sensible and regulative functions has been proposed to be used in bolt groups. The smart structure is constituted with the auto- even- load connecting component made of the shape memory alloy material. The mechanical behavior of the auto- even- load component in the bolt groups is analyzed. Its auto- even- load and the regulative principle to prevent the fracture are also studied.

Key Words Automatic equalization Shape memory alloy Bolts

INTEGRAL STRESS ANALYSIS TECHNIQUES AND SOFTWARE DESIGN FOR A COMPOSITE ROTOR

Zhou Chuanyue, Sheng Huiyu, Lin Xiangdong, Li Ming
(Harbin 703 Research Institute, Harbin 150036)

ABSTRACT A mathematical and mechanical model for analyzing the integral stress of a composite rotor is presented, which takes into account such factors as mating relations of the various components of the rotor, rotating centrifugal forces and thermal expansion, etc. A general- purpose software (REC) for the analysis of the rotor integral stress has been designed, which can be employed not only for a complicated rotor incorporating both radial and axial pretightening, but also for a rotor with any arbitrary axisymmetrical structures. With the help of the software it is possible to ascertain automatically whether the mating surface among the various components loosens, and to determine a rational radial interference and axial pretightening. The analysis of numerical examples and practical engineering applications indicates that the provided method is correct, the software design rational and the calculation precision and the speed quite high.

Key Words Rotors Stress analysis Programming

RESEARCH ON COUPLED LATERAL TORSIONAL VIBRATION OF ROTOR- GEAR COUPLING SYSTEM

Li Ming, Zhang Yong, Jiang Peilin, Yu Lie

(Institute of Lubrication Theory & Bearing, Xi'an JiaoTong University, Xi'an 710049)

ABSTRACT Based on the meshing condition of the gears, the constraint equa-