

滑动轴承—转子系统 Hopf 分岔 分析计算方法*

西安交通大学 袁小阳** 朱 均

【摘要】 基于 Hopf 分岔定性理论、周期系统 Floquet 理论, 针对流固耦合系统力函数计算特点, 并考虑系统规模大小对算法的不同要求, 提出了一套新的转子—轴承系统 Hopf 分岔分析计算方法。这套方法主要包括自激周期解计算的边值方法、周期解稳定性判别算法、周期解预测—校正延续算法、自激振动的稳定裕度准则等, 可以有效地确定转子—轴承系统 Hopf 分岔临界点及分岔方向, 可以研究分岔解的发展、变化, 包括研究实践中关注的“跳跃”、“迟滞”等典型非线性现象。

主题词: 转子 滑动轴承 分岔

分类号: V231.9

1 前 言

随着学科发展和工业需要的不断推动, 90 年代以来对转子—轴承系统分岔特性的研究得到加强^[1]。作者在文献[2, 3]中分别研究了某大型发电机轴系的自激振动和概周期振动, 前者涉及到 Hopf 分岔, 后者分析了非自治系统广义 Hopf 分岔。由于流固耦合高维非线性问题的复杂性, 此类以规模较大的系统为对象所进行的非线性动力学分析只是初步的尝试, Hopf 分岔的数值分析目前仍局限于规模较小的系统^[4~6]。本文针对滑动轴承动态油膜力计算的特点, 考虑系统规模大小对算法的不同要求, 较系统地研究了滑动轴承—转子系统 Hopf 分岔特性的分析计算方法, 提出了一套新方法, 它包括确定分叉点的方法、一种带参数的周期解改进打靶法、周期解稳定性数值方法和一个自激振动稳定裕度准则, 以及确定超、亚临界 Hopf 分岔的计算方案、周期解预测—校正延续算法等。由这套新的算法编制、集成了滑动轴承—转子系统 Hopf 分岔分析计算软件包, 对采用有限长轴承模型的刚性 Jeffcott 转子系统进行了 Hopf 分岔计算、分析, 研究结果丰富、深化了关于轴系 Hopf 分岔的认识。

2 Hopf 分叉与线性失稳

可用下述单参数常微分方程系统来描述轴承—转子系统的横向振动:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (x, \mu) \in R^n \times R \quad (1)$$

设系统 (1) 有平衡点 $x_0 = x_0(\mu)$, 即满足 $f(x_0, \mu) = 0$, 并设 $f(x, \mu)$ 在 (x_0, μ) 的邻域内可导, 则非线性系统 (1) 关于平衡点 (x_0, μ) 的线性化单参数系统为:

$$\dot{x} = Ax \quad x \in R^n \quad (2)$$

式中: $\bar{A}$ 为 Jacobi 矩阵 $\bar{A} = \partial f(x_o, \mu) / \partial x$

线性动力学分析实践表明, 大多数情况下轴承—转子系统在失稳临界参数 $\mu = \mu_o$ 处满足下述条件: (1) $\bar{A}(x_o, \mu_o)$ 有一对纯虚非零特征值 $\pm j\omega$, 并且其余 $(n-2)$ 个特征值均有负实部; (2) $(du/d\mu)_{\mu=\mu_o} \neq 0$, 这里 $u(\mu) \pm j\omega(\mu)$ 为矩阵 $\bar{A}(x_o, \mu)$ 的对于 $\pm j\omega$ 连续展开的特征值; 这组条件正是 Hopf 分叉条件。Hopf 分叉理论指出满足该条件时非线性系统 (1) 将从平衡点分叉出一个周期解。

根据 Hopf 分叉理论, 若系统 (1) 满足 Hopf 分叉条件, 并且 $(du/d\mu)_{\mu=\mu_o} > 0$, 则除了 $\mu = \mu_o$ 的情况以外, 有下述两种情况之一发生。(1) 超临界分叉。在 $\mu > \mu_o$ 方向, 系统从平衡点 (x_o, μ_o) 分叉出稳定的周期解, 并且当 $\mu \rightarrow \mu_o$ 时, 周期解 $g(t) \rightarrow x_o(\mu_o)$; (2) 亚临界分叉。在 $\mu < \mu_o$ 方向, 系统从平衡点 (x_o, μ_o) 分叉出不稳定的周期解, 并且当 $\mu \rightarrow \mu_o$ 时, 周期解 $g(t) \rightarrow x_o(\mu_o)$ 。

3 求自激振动周期解的边值方法

常微分方程系统 (1) 为自治系统, 求该系统的自激振动周期解可视为求解周期 T 未知的自由边值问题:

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x(0) - x(T) = 0 \quad x \in R^n \quad (3)$$

引入参数 $s = x(0) \in \Sigma$ (Σ 为选取的 Poincare 截面), 则适合问题 (3) 的 $x(0)$ 和 T 即为非线性代数方程 (4) 的解:

$$r(s) = s - x(T, s) = 0 \quad (4)$$

其中: $x(T, s)$ 由下述初值问题确定, $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x(0) = s$ 。这里 $x(T, s) \in \Sigma_o$ 。

在前文献 [2] 中针对规模较大的系统提出了一种较有效的求解方程 (6) 的迭代计算方案, 其特点是迭代中不需要计算 $f(x, \mu)$ 的 Jacobi 矩阵或等效的差商矩阵, 而是采用 Broyden 秩为 1 迭代式。文献 [2] 由此提供的打靶类方法 (BSM 法) 用于大系统有其优越性, 但用于求解小系统 Hopf 分叉解不甚适宜, 主要不足是计算速度快的优势不能发挥并且计算过程中的信息不能够用于周期解 (轨道) 稳定性分析。本文提出一种改进的拟牛顿打靶法迭代方案, 其迭代式:

$$s^{(k+1)} = s^{(k)} - \beta_k [\Delta r(s^{(k)})^{-1}] r(s^{(k)}) \quad (5)$$

带有参数 β_k , 式中: 上、下标 k 记迭代次数, $\Delta r(s)$ 是向量函数 $r(s)$ 的差商矩阵。

上述针对规模较小的轴承—转子系统构造的自激振动周期解计算方法 (以下简称 PNSM 法), 经计算实践验证, 其计算效率高、收敛性好, 可以求解稳定性很低、甚至不稳定的周期解, 并且每步迭代中计算的差商矩阵 Δr 在随后进行解的稳定性分析中可以得到充分利用。至此, 得到了分别适用于规模较大和较小的系统自激周期解计算方法 (BSM 法和 PNSM 法)。

4 自激周期解的稳定性及一个稳定裕度准则

将周期解 $g(t)$ 的被扰运动 $g(t) + y(t)$ 代入方程 (1) 后, 对扰动向量 $y(t)$ 作 Taylor 展开且仅保留一次项, 得到 $y(t)$ 满足的微分方程

$$\dot{y} = A(t)y, \quad A(t+T) = A(t) \quad (6)$$

其中: $A(t) = [\partial f(x, \mu) / \partial x]_{x=g(t)}$ 为周期系数矩阵。 $g(t)$ 的稳定性由方程 (6) 的稳定性决定。

方程 (6) 为周期系数线性常微分方程。根据 Floquet 理论, 方程 (6) 的稳定性归结为求特征矩阵 C 。而 C 的计算对隐式微分方程可转化为求差商矩阵 Δr , 且有 $C = I - \Delta r$ 。由此可求出特征指数。由 Floquet 理论可得自激振动周期解 $g(t)$ 的稳定性准则:

准则 1 若 $(n-1)$ 个特征指数有负实部, 则 $g(t)$ 是稳定的; 至少有一个特征指数的实

部大于零, 则 $g(t)$ 是不可稳定的; 至少有两个特征指数的实部为零, 则为临界情况。

为表达自激振动周期解的稳定性程度, 本文定义一个特征量 δ , 称之为稳定度。设特征指数为: $\lambda = -u_i + j\omega$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。因必有一个特征指数的实部为零, 不妨设 $u_n = 0$, 定义稳定度为: $\delta = \min(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$

显然, 准则 1 可描述为: 若 $\delta > 0$, 则 $g(t)$ 稳定; $\delta < 0$ 则 $g(t)$ 不稳定; $\delta = 0$ 为临界情况。 δ 反映了扰动向量 $y(t)$ 随时间增大时的收敛性, 可用来表征 $g(t)$ 的稳定性程度, 由此建立一个稳定裕度准则:

准则 2 轴承—转子系统自激振动周期解的稳定裕度由稳定度 δ 来度量。 δ 较大表明 $g(t)$ 的稳定性较高, 反之稳定性较低。

稳定度 δ 的计算精度首先取决于周期解 $g(t)$ 的精度。若用前述 $PNSM$ 法求解周期解, 可以对迭代计算过程中的近似解由差商矩阵 Δ_r 计算近似的 δ , 以便综合分析和控制 $g(t)$ 和 δ 的计算精度; 若用 BSM 法计算周期解, 则在求出精确的周期解后, 再参照本文方法计算差商矩阵后即得 δ 。

5 分岔方向的分析计算方法

根据 Hopf 分岔的性质, 利用周期解及其稳定性计算分析, 可以判断具体系统的 Hopf 分岔方向。本文构造了一种计算方案, 以转速 Ω 为分岔参数介绍其基本思想及步骤:

步 1 在 Ω (失稳转速) 的一个邻域 $(\Omega, \Omega + \Delta\Omega)$ 内求解周期解, 若不存在稳定的周期解, 则转步 2。若存在稳定的周期解, 并且当 $\Omega \rightarrow \Omega$ 时振幅趋近于零, 则为超临界分岔; 若振幅不趋近于零, 则为亚临界分岔。

步 2 至此步原则上已可判定为亚临界分岔。为进一步验证, 可在区间 $(\Omega - \Delta\Omega, \Omega)$ 内求解周期解。若存在不稳定的周期解, 并且它的振幅随 $\Omega \rightarrow \Omega$ 而趋近于零, 则原判断正确。

6 分岔解发展、变化的分析方法

Hopf 分岔理论及方法多局限于研究分岔点及分岔方向, 但处理实际工程问题需要进一步研究分岔解随参数变化的发展情况, 以了解 Hopf 分岔的全貌。

提出一种周期解预测—修正延续算法。构造此算法的思路: 将周期解的跟踪转化为延续计算 Poincare 映射不动点的解曲线, 然后利用类似文献 [8] 关于分岔点的延续算法思路来构造算法跟踪不动点。本文中满足方程 (4) 的 $x(o)$ 即为 Poincare 映射不动点。设由前述打靶法已求出二个参数下的周期解, 则可从这二个初始解开始进行计算一步步地跟踪解曲线。记 $g_{i-1}(t)$ 、 $g_i(t)$ 分别为 μ_{i-1} 、 μ_i 参数下的二个解, 对应的满足方程 (4) 的 $x(o)$ 及 T 记为 (x_{i-1}, T_{i-1}) 和 (x_i, T_i) , 则可得到参数 μ_{i+1} 下关于 x_{i+1} 、 T_{i+1} 的一个 Euler 预测:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{x_i - x_{i-1}}{\mu_i - \mu_{i-1}}(\mu_{i+1} - \mu_i), \quad T_{i+1} = T_i + \frac{T_i - T_{i-1}}{\mu_i - \mu_{i-1}}(\mu_{i+1} - \mu_i) \quad (7)$$

这里不需要更高阶的公式, 因为每步预测后都需要进行迭代修正, 迭代式仍采用式 (5), 对于规模较大的系统亦可采用前述 Broydon 秩为 1 迭代式^[2]。由修正后的 (x_{i+1}, T_{i+1}) 即可通过初值问题一个周期内的积分得到 μ_{i+1} 参数下的周期解 $g_{i+1}(t)$ 。根据已有数据进行预测并作为迭代修正的初始值, 这种技术在本文中亦用于处理分岔点及动态油膜力的延续计算。

对延续计算中每步得到的周期解需进行稳定性计算分析, 若解的稳定性发生变化, 如超临界分岔解由稳定变为不稳定, 亚临界分岔解由不稳定变为稳定, 则系统都将发生二次分岔。

若亚临界分岔时系统同时存在稳定的大“尺度”周期解，也可用上述延续算法对其进行跟踪并进行稳定性判别。

7 算例及讨论

研究对象为采用有限长圆柱轴承模型的刚性 Jeffcott 转子系统。它可简化为质量为 m 的轴颈支承在单个轴承上的模型。轴承非线性油膜力根据有限长轴承模型，通过求解普遍雷诺方程得到。

在等温、层流假设下，圆柱轴承动力润滑的决定性相似变量只有一个，为轴承长径比 L/D ；性能相似一般通过轴颈相对轴承的偏心率 E 来描述。文中采用通常的无量纲变换，取无量纲位移 $X = x/c$ ， $Y = y/c$ ，无量纲油膜力 $F_x = (f_x \psi^2) / (\eta \bar{\omega} L D)$ ，无量纲质量 $M = (m c \bar{\omega} \psi^2) / (\eta L D)$ ，无量纲时间 $\tau = \bar{\omega} t$ 。其中 C 为轴承的半径间隙， L 和 D 分别为轴承的长度和直径， ψ 为间隙比， η 为润滑油动力粘度， $\bar{\omega}$ 为工作圆频率。

取 $L/D = 1$ ，并采用层流、等温假设，通过线性稳定性分析得知，系统除 E 约大于 0.8 时为恒稳外，系统均存在失稳转速 Ω_c ，并且在转速 $\Omega = \Omega_c$ 处均满足 Hopf 分岔条件。本文将研究不同偏心率下产生的 Hopf 分岔的特性。为了更清楚地表述计算结果，文中已将部分相似变量转换为有量纲物理量，转换中取 $D = 100\text{ mm}$ ， $\psi = 0.002$ ， $\eta = 0.01802\text{ NS/m}^2$ ， $c = 0.1\text{ mm}$ ， $m = 140 \sim 6330\text{ kg}$ 。分岔点计算的部分结果见表 1，表中 m 为给定的质量， Ω_c 为相应的线性失稳转速， γ 为涡动比 ($\gamma = \omega / \bar{\omega}$ ， ω 为涡动角速度)， E_s 为相应的失稳临界状态偏心率。

表 1 不同 m 下的 Hopf 分岔点

$m\text{ (kg)}$	140	285	435	2270	6330
$\Omega_c\text{ (r/min)}$	5970	5980	5995	6190	6905
γ	0.501	0.501	0.502	0.505	0.441
E_s	0.05	0.10	0.15	0.50	0.70

运用本文提出的分岔方向判别方法，通过计算分岔点邻域内的周期解及其稳定度 δ ，确定了系统在不同系统参数下 ($0.05 \leq E_s \leq 0.7$) 的分岔方向：当 $E_s < E_s^* \approx 0.13$ 时，系统在 Ω_c 处产生亚临界 Hopf 分岔；当 $E_s > E_s^*$ 时，系统在 Ω_c 处产生超临界 Hopf 分岔。

以 $E_s = 0.15$ ，0.5 和 0.7 为例，超临界分岔解的产生及发展过程见图 1。以 $E_s = 0.05$ 和 0.1 为例，亚临界分岔解及共存的大“尺度”解的产生、发展过程见图 2。对周期解进行了详细的频谱分析，限于篇幅不给出谱图。

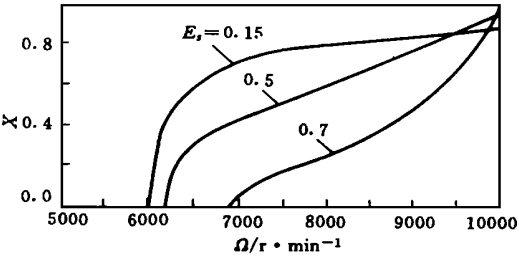


图 1 超临界分叉

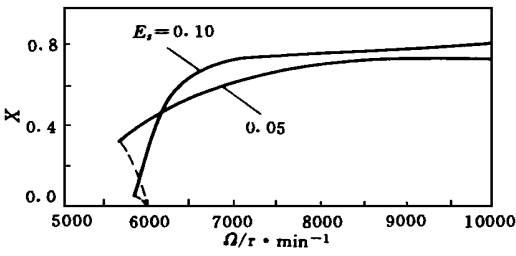


图 2 亚临界分叉图

由计算结果，可对超临界分岔时系统自激振动的特性分析如下：(1) 轴系线性失稳发生分岔

后, 在很宽的转速范围内存在稳定的周期解, 系统的定常运动为周期性自激振动; (2) 这种自激振动一般具有突发性, 且随 E_s 减小突发性增强; (3) 自激振动的涡动比在不同 E_s 下一般随 Ω 增加先略为减小, 后略有增加, 其值均接近于相应 E_s 下线性分析的涡动比 (表 1); (4) 自激振动在不同的 E_s 和 Ω 下均以基频 ($Y\Omega$) 分量为主, 高阶谐波分量很小, 且 X 和 Y 两方向的振幅相近; (5) 当 $\Omega < \Omega_c$ 时, 系统的定常运动状态为静态平衡点, 未发现其它形式的定常运动存在; (6) 不存在固有的“跳跃”“迟滞”特性。当然, 由于振幅对转速极为敏感亦会导致升、降速过程瞬态响应表现出某种突变和滞后特点。这种特点与所述固有特性应加以区分。

由计算结果, 可对亚临界分岔作如下分析: (1) 在 $\Omega < \Omega_c$ 的一个不大的转速范围内, 系统存在定性理论预言的不稳定的周期解, 此解的幅值随 Ω 减小逐渐增大。此解只有理论意义, 而不会成为实际发生的自激振动; (2) 发现系统在很大的转速范围内存在大“尺度”周期解, 该解还延伸到 $\Omega < \Omega_c$ 方向, 解的稳定度 δ 随 Ω 减小逐渐趋近于零, 至 $\delta = 0$ 后更低的转速下不存在稳定的周期解; (3) 从数值特征上看, 不稳定的分岔解与大“尺度”解在某一转速下相互转化, 并发生稳定性交换。这种规律符合运动状态演化的一般认识, 但不能得到充分的理论支持; (4) 在 $\Omega < \Omega_c$ 的一定转速范围内稳定的平衡点和稳定的周期解共存, 若受到足够的扰动, 系统将发生自激振动; 这个特定的转速范围随 E_s 减小而增大; (5) 系统存在固有的“跳跃”、“迟滞”非线性振动特性; (6) 大“尺度”振动的频率特性及谐波组成与超临界情况类似。

8 结 论

提出的滑动轴承—转子系统 Hopf 分叉分析计算方法由线性系统特征值方法、自激周期解计算的边值方法、周期解稳定性判别方法、周期解预测—校正延续算法等基本算法组成, 可以确定隐式微分方程系统的 Hopf 分岔点、分岔方向, 并可用于研究“跳跃”、“迟滞”等典型非线性现象。对于自激周期解的计算, 文中针对规模较小的系统构造的算法 (PNSM 法), 与作者在文献 [2] 中提出的适用于大系统的算法 (BSM 法) 一起较成功地处理了这个问题。根据超、亚临界 Hopf 分岔的定性特征构造的分岔方向判别方法其物理意义明确并具有几何直观性, 适用于处理隐式微分方程系统, 避免了传统方法需要力函数高阶导数的局限。提出的周期解预测—校正延续算法使解流形的跟踪有线索可寻, 因而较为快捷、可靠。由这套新的算法编制、集成的软件包可以高效、精确地研究滑动轴承—转子系统的 Hopf 分岔复杂动态行为。

参 考 文 献

- 1 Ishida Y. Nonlinear Vibrations and Chaos in Rotordynamics. JSME International Journal, Series C, 1994, 37 (2): 237–245
- 2 袁小阳, 朱均. 多圆盘转子—滑动轴承系统自激振动的计算与分析. 西安交通大学学报, 1997, 31 (8): 80–86
- 3 袁小阳, 朱均. 多圆盘转子—滑动轴承系统的概周期运动. 西安交通大学学报, 1997, 31 (2): 84–89
- 4 陈予恕, 孟泉. 非线性转子—轴承系统的分岔. 振动工程学报, 1996, 9 (3): 266–275
- 5 Hollis P, Taylor D L. Hopf Bifurcation to Limit Cycles in Fluid Film Bearings, ASME J. Trib, 1986, 108: 184–189
- 6 Wilda A. Mechanismus der Gleitlagerinstabilität. Konstruktion, 1992, 44: 306–312
- 7 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillation Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlog, New York, 1983
- 8 季海波, 武际可, 胡海昌. 分叉问题的几何描述及其计算方法, 中国科学 (A 辑), 1991, (9): 947–954

was investigated through approximate simulation experiments. The plates had five different geometry configurations. The experimental results indicated that the convective heat transfer coefficient in the cooling hole, the adiabatic film effectiveness and geometrical configuration were the critical factors for the overall cooling effectiveness. The investigation plays an important role in designing the inclined multihole wall and selecting the geometry of these cooling configuration.

Key Words Combustion chambers Cooling efficiency Experiments

EXPERIMENTAL STUDY ON FILM COOLING ON A SUCTION SURFACE OF A PLANE TURBINE CASCADE

Chen Fu, Song Yangping, Wang Zhongqi

(*Energy Science and Engineering School, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001*)

ABSTRACT

The flow field structure of a film cooled turbine for a typical design with four rows of cooling holes on the suction surface has been investigated in a plane cascade rig by the aid of flow visualization techniques and pneumatic probe measurement. The experimental results showed that a little vortex in opposite direction of rotation emerged as the passage vortex existed at the root of suction surface. The vortex was induced mainly by mixing between mainstream and injecting air, and resulted from formation of kidney-shaped vortex. The injected air was essentially absent in a triangular region extending from near the region of peak curvature on the blade to its trailing edge, and the separation line of the passage vortex was skewed toward the end wall. A very complex three-dimensional flow occurred in the downstream of the jet exit, and remained near the blade surface at the exit of the cascade. The kidney-shaped vortex was kept near the blade surface, and mixed with the wake at the exit of the cascade.

Key Words Turbines cascades Flow fields Experiments

HOPF BIFURCATION OF A ROTOR- SLIDING BEARING SYSTEM

Yuan Xiaoyang and Zhu Jun

(*Theory of Lubrication and Bearing Institute, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049*)

ABSTRACT

A new numeric-analytical method for Hopf bifurcation of a rotor-bearing system is presented according to the Hopf bifurcation theory and Floquet stability theory. The method comprises a modified shooting method for calculating periodic solutions, a calculation method for determining the stability of the solutions, and a prediction correction procedure for tracing the solutions, etc. The software package realized with these techniques was used for efficient and accurate study of Hopf bifurcation behaviors of rotor-sliding bearing systems. The results show that there exists an unstable subcritical limit cycle for small E_s , the journal center eccentricity ratio at a critical instability. A stable supercritical limit cycle exists for large E_s . When supercritical bifurcation occurs, limit cycle appears as soon as the rotor speed exceeds its threshold value, and the limit cycle does not become unstable until the rotor speed surpasses the threshold speed a lot. When subcritical bifurcation occurs, the

behavior of rotor is more complicated. In addition to existence of an unstable limit cycle below the threshold speed, there are large- amplitude stable limit cycles both above and below the threshold speed. That explains why jump phenomena and hysteresis in the amplitude may occur in a rotor- sliding bearing system.

Key Words Rotors Sliding bearing Bifurcation

VIBRATION CONTROL OF ROTOR ELECTRO- RHEOLOGICAL SYSTEM BASED ON FUZZY LOGICAL SYSTEM

Qu Wenzhong, Yao Guozhi, Qiu Yang

(*Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049*)

ABSTRACT Electro- rheological (ER) fluids have extensive application in the field of vibration control as a kind of intelligent materials. It is very difficult to develop a conventional control system due to the nonlinearity of the ER effect in regard to electric field strength, temperature or shear rate. An adaptive fuzzy control system is composed of a structural identification system and a controller system, and introduced for the ER damper- rotor vibration system due to the function approximator property of fuzzy logical system. A numerical study indicates the validity of the adaptive algorithm and the effective suppression of the rotor vibration.

Key Words Rotor Vibration Control Fuzzy control theory Adaptive algorithms

A ROTATIONAL SYMMETRY FINITE ELEMENT MODEL OF GAS TURBINE ROTOR IN CHARACTERISTICS ANALYSIS

Zhou Chuanyue, Wen Xueyou, Liu Xueyi

(*Harbin No. 703 Research Institute, Harbin*)

Zou Jingxiang

(*Harbin Institute of Technology, Harbin 150001*)

ABSTRACT A rotational symmetry finite element model is provided to calculate gas turbine shaft critical speeds and unbalance response analysis. A Fourier series representation allows the three- dimensional shaft geometry to be modeled in a basic section by using three- dimensional element. Unlike a beam element model, a solid element representation allows the actual rotor geometry to be modeled. A matrix reduction technique is used to reduce the degrees of freedom. An engineering example of marine gas turbine rotor is applied to the verification of the provided model.

Key Words Rotor Dynamic characteristics Fourier series Finite Element Model