

文章编号: 1000-8055 (2001) 01-0067-04

轴流透平级的最佳流型设计方法

辛 喆¹, 邹滋祥²

- 1 中国农业大学, 北京 100083;

2 中科院工程热物理研究所, 北京 100080

摘要: 把近代最优控制论方法引入轴流透平叶片的设计, 在优化的轴流透平子午通道内, 建立包括透平级内所有性能参量的最优流型命题的完整的物理模型及其数学表达式, 并且化为一个在给定初始状态、自变量终端固定、部分状态变量终端受有约束的条件下, 使级的某一性能指标 (如级的功率) 达到最优的最优控制问题, 应用“代价函数法”及“共轭梯度法”编制计算程序, 计算得到符合给定约束条件、并使目标函数取极值的最优环量分布, 结果是令人满意的。

关键词: 透平; 最佳流型设计; 最优控制理论
中图分类号: O 235; TB 21 **文献标识码:** A

1 前 言

近年来, 优化设计已深入到工程设计的各个领域。但应用最优控制论进行叶轮机 S₂ 流面最优流型的设计报道的文献资料不多。文献 [1, 2] 虽把最优控制论引入了最优流型设计, 也建立了较为完善的数学模型和工程约束条件, 但还未涉及实际的计算求解。文献 [3] 在国内首次进行了压气机最优流型的控制, 取得了一些有益的结果, 但其设计是以导叶出口截面 (第一截面) 参数 (包括流量) 及环量分布 $C_{1u}r_1(r_1) = f(r_1)$ 已知为前提的; 并非在整级全部性能参量所形成的向量空间内进行的完整的优化设计。针对最优流型设计工作的不足, 本文依据整级优化的思想 (即考虑包括导、动叶进出口截面全部热力, 几何参数) 建立了完善的物理模型及数学表达式 (九维状态空间, 四维控制空间), 不仅改进、完善了最优流型的设计思想, 也在计算方法上取得了新的突破。

2 叶片最佳流型设计的物理模型

本文所述的最佳流型设计是在已经给出的优化子午几何通道内 (图 1), 并在叶列间的无叶间隙内进行, 它满足轴对称流动的假定。这样, 在 S₂ 流面内的径向叶片力 F_r 及所有周向微分量,

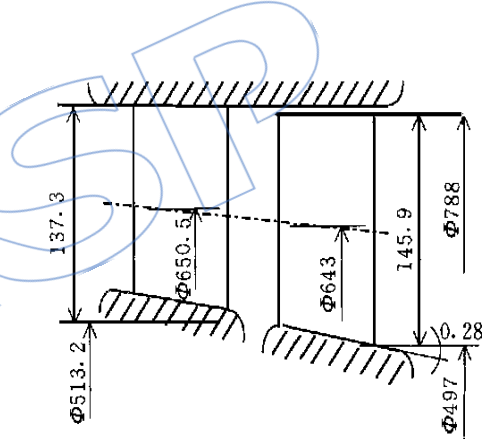


图 1 优化子午几何通道参数

就可以忽略不计了。同时还假定: 流动是相对稳定、绝热、可压及当地无粘而过程是不等熵的。

在上述假定下, 流动应遵循连续方程、动量方程、能量方程、过程方程、理想气体的状态方程、熵的关系式及速度三角形关系式, 并由此可推出径向平衡方程, 作为等式约束考虑在最佳流型设计的物理模型中。

根据最优控制理论, 本文建立了最优控制环量与流线曲率半径的最优流型设计的物理模型:

(1) 状态向量: $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_9)^T =$
 $(C_{1m}, G_1, C_{1u}r_1, \varphi_1, C_{2m}, G_2, C_{2u}r_2, \varphi_2, r_2)^T$ (1)

其中: C_m 为绝对速度在子午面上的投影 (m/s), G 为流量 (kg/s), C_u 为绝对速度的周向分量 (m/

s), C_{ur} 为环量 (m^2/s), φ 为 C_m 与绝对速度的轴向分量间夹角 (弧度), r 为半径 (m), 1 为导叶出口截面, 2 为动叶出口截面, m 为子午面方向。

$$(2) \text{ 控制向量: } \vec{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T = [d(c_{1u}r_1)/dr_1, r_{1m}, d(c_{2u}r_2)/dr_1, r_{2m}]^T \quad (2)$$

(3) 系统的微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} dx_1/dr_1 &= f_1(r_1, x_1, x_3, x_4, u_1, u_2) \\ dx_2/dr_1 &= f_2(r_1, x_1, x_3, x_4), dx_3/dr_1 = f_3(u_1) \\ dx_4/dr_1 &= f_4(r_1, x_1, x_3, x_4, u_2) \\ \frac{dx_5}{dr_1} &= f_5(r_1, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, u_1, u_3, u_4) \\ dx_6/dr_1 &= f_6(r_1, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9) \\ dx_7/dr_1 &= f_7(u_3) \\ dx_8/dr_1 &= f_8(r_1, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, u_4) \\ dx_9/dr_1 &= f_9(r_1, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(4) 初始条件: $G_1(r_{10}) = G_2(r_{10}) = 0$

$$Q(r_{10}) = Q(r_{20}) = \text{给定值} \quad (4)$$

其它状态量初值可根据文献 [5] 中轴流透平级几何通道优化计算的结果给出。

(5) 约束条件: 终端状态部分固定

$$\left. \begin{aligned} G_1(r_{1f}) &= G_2(r_{2f}) = \bar{G} = \text{给定} \\ r_2(r_{1f}) &= \bar{r}_2 = \text{给定值} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其它状态量自由, 控制量无约束。

(6) 指标泛函: 指标泛函一般有两种选择: 一种是在要求的级效率下级输出功率最大; 一种是在规定的作功量下级效率最高。现选择前一种。

$$\left. \begin{aligned} J &= \int_{10}^f \omega(C_{1u}r_1 - C_{2u}r_2)C_{lm} \cos \varphi \rho_1 2\pi r_1 dr_1 \\ \eta_f &= \int_{10}^f \eta(r_1)C_{lm} \cos \varphi \rho_1 2\pi r_1 dr_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

于是, 轴流透平级叶片最佳流型设计的最优控制命题可表述为: 寻找 $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ 的最优分布, 在满足约束条件 (5) 下, 使系统

$$\left\{ \begin{aligned} d\lambda_1/dr_1 &= -(\partial H/\partial x_1) = -[\partial \varphi_0/\partial x_1 + \lambda_1(\partial \varphi_1/\partial x_1) + \lambda_2(\partial \varphi_2/\partial x_1) + \cdots + \lambda_9(\partial \varphi_9/\partial x_1)] \\ d\lambda_2/dr_1 &= -(\partial H/\partial x_2) = -[\partial \varphi_0/\partial x_2 + \lambda_1(\partial \varphi_1/\partial x_2) + \lambda_2(\partial \varphi_2/\partial x_2) + \cdots + \lambda_9(\partial \varphi_9/\partial x_2)] \\ &\vdots \\ d\lambda_9/dr_1 &= -(\partial H/\partial x_9) = -[\partial \varphi_0/\partial x_9 + \lambda_1(\partial \varphi_1/\partial x_9) + \lambda_2(\partial \varphi_2/\partial x_9) + \cdots + \lambda_9(\partial \varphi_9/\partial x_9)] \end{aligned} \right.$$

(3) 迭代计算中控制变量的取值

按下式求出第 k 次迭代时指标的梯度

$$\vec{g}^{(k)} = \partial H / \partial \vec{U} |_{\vec{U} = \vec{U}^{(k)}(t)} =$$

$$(\partial H / \partial u_1, \partial H / \partial u_2, \partial H / \partial u_3, \partial H / \partial u_4)^T |_{\vec{U} = \vec{U}^{(k)}(t)}$$

$$\text{其中: } \frac{\partial H}{\partial u_1} = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} + \lambda_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} + \lambda_5 \frac{\partial \varphi_5}{\partial u_1}$$

$$\partial H / \partial u_2 = \lambda_1(\partial \varphi_1 / \partial u_2) + \lambda_4(\partial \varphi_4 / \partial u_2)$$

(3) 由初态 (4) 转移至终端状态 (5) 时, 指标 (6) 达到最大值。

3 叶片最佳流型设计的求解

如前所述, 我们已将轴流透平级叶片最佳流型的设计问题归纳为一个在给定初始状态、自变量终端固定、部分状态变量终端受有约束的条件下, 使级的输出功率达到最优值的最优控制问题。借助于数值计算方法, 首先采用“代价函数法”(或称“罚函数法”)将状态变量带有终端约束的问题转化为无约束问题, 然后再采用“共轭梯度法”加以实现。该最优流型问题的求解过程如下:

(1) 用“代价函数法”作新的目标函数

$$J = \int_{10}^f -\omega(C_{1u}r_1 - C_{2u}r_2)C_{lm} \cos \varphi \rho_1 2\pi r_1 dr_1 + AP$$

式中代价项

$$\begin{aligned} AP &= (1/2)N \{ [x_2(r_{1f}) - \bar{G}_1]^2 + [x_6(r_{1f}) - \bar{G}_2]^2 + [x_9(r_{1f}) - \bar{r}_2]^2 \} \\ N^{(k+1)} &= NN1 \times N^{(k)} \quad NN1 > 0 \end{aligned}$$

经此处理后, 终端状态全部自由, 原有约束最优控制问题转化为无约束最优控制问题。同时, 原求最大值问题也化为求 J 的最小值问题, 且它与原命题等价。

(2) 引入拉格朗日乘子 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_9)^T$, 组成哈密顿函数: $H = f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_9 f_9$

边界条件: 初态: $\vec{X}(r_{10}) = \vec{X}^{(0)}$

终态: $\lambda(r_{1f})$ 由下式确定:

$$\lambda_i(r_{1f}) = 0 \quad (i = 1, 3, 4, 5, 7, 8)$$

$$\lambda(r_{1f}) = \partial K / \partial x_i = N_j \psi_i =$$

$$N_j [X_i(r_{1f}) - X_i^{(f)}] \quad (i = 2, 6, 9)$$

伴随方程:

$$\partial H / \partial u_3 = \lambda_5(\partial \varphi_5 / \partial u_3) + \lambda_7(\partial \varphi_7 / \partial u_3)$$

$$\partial H / \partial u_4 = \lambda_5(\partial \varphi_5 / \partial u_4) + \lambda_8(\partial \varphi_8 / \partial u_4)$$

并按共轭梯度方法求出寻优方向 $\vec{P}^{(k)}$:

$$\vec{P}^{(k)} = -\vec{g}^{(k)} + \beta^{(k)} \cdot \vec{P}^{(k-1)}$$

其中共轭系数:

$$\beta^{(k)} = \begin{cases} (\vec{g}^{(k)}, \vec{g}^{(k)}) / (\vec{g}^{(k-1)}, \vec{g}^{(k-1)}) & k > 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

对第 $(k+1)$ 次控制变量取值为:

$$\vec{U}^{(k+1)} = \vec{U}^{(k)} + \alpha^{(k)} \vec{P}^{(k)}$$

其中: $\alpha^{(k)}$ 为最优步长。

(4) 初始控制 $\vec{U}^{(0)}(t)$ 的选取

用共轭梯度法进行计算时, 要求对初始控制 $\vec{U}^{(0)}(t)$ 进行适当选取, 如果选取得当, 可以加速迭代过程的收敛性。若有一定的实际计算经验并且根据具体问题的物理意义, 一般可以较好地选取 $\vec{U}^{(0)}(t)$ 。本文就是这样选取 $\vec{U}^{(0)}(t)$ 的。

(5) 最优步长 $\alpha^{(k)}$ 的选择

用共轭梯度法进行计算时, 还需对步长参数 $\alpha^{(k)}$ 进行适当选择。如果 α 选取得当, 迭代过程收敛就快; 反之收敛慢, 甚至有可能算不出所要求的结果来。这里, 解一个一维极小问题:

$$J[\vec{U}^{(k)}(t) + \alpha^{(k)} \vec{P}^{(k)}] = \min_{\alpha} J[\vec{U}^{(k)}(t) + \alpha \vec{P}^{(k)}]$$

可以最佳地确定 $\alpha^{(k)}$ 的值。解一维极小问题有许多种方法, 本文采用了曲线拟合法, 它充分利用了计算过程中已得到的量, 能比较好地确定出 $\alpha^{(k)}$ 。

(6) 计算过程的终止

设 ϵ 是给定的允许误差范围, 则当指标泛函 J 的值的相对误差小于 ϵ 时, 即当满足:

$$\left| \frac{J[\vec{U}^{(k+1)}(t)] - J[\vec{U}^{(k)}(t)]}{J[\vec{U}^{(k+1)}(t)]} \right| = \hat{\delta} < \epsilon$$

时, 计算过程才可以终止。

4 计算结果及分析

4.1 算例

(1) 给定的设计参数: 流量 $\bar{G} = 45 \text{ kg/s}$; 透平转速 $n = 12000 \text{ r/min}$; 透平进口总压 $P_0^* = 4.2434 \times 10^5 \text{ Pa}$; 透平进口总温 $T_0^* = 1180 \text{ K}$; 透平级出口压力 $P_2^* = 1.794 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。

(2) 状态变量初值 $\vec{X}^{(0)}$:

$$X_1(r_{10}) = C_{1m}(r_{10}) = 186.785$$

$$X_2(r_{10}) = G_1(r_{10}) = 0$$

$$X_3(r_{10}) = C_{1u}r_1(r_{10}) = 129.44$$

$$X_4(r_{10}) = Q(r_{10}) = -9.5$$

$$X_5(r_{10}) = C_{2m}(r_{10}) = 236.40$$

$$X_6(r_{10}) = G_2(r_{10}) = 0$$

$$X_7(r_{10}) = C_{2u}r_2(r_{10}) = -7.11$$

$$X_8(r_{10}) = Q(r_{10}) = -9.5$$

$$X_9(r_{10}) = r_2(r_{10}) = 0.2461$$

(3) 代价因子取值: 第一次迭代计算时, 代价因子 $N = 50$, 以后每次迭代时代价因子均增大 2.5 倍。

4.2 计算结果

按如前所述的数值计算方法进行最佳流型设计, 得到满足约束 (5)、使系统 (3) 由初态 (4) 转移到终态 (5), 并使指标 (6) 达最大值的最优控制

$\vec{U}(r_1) = [u_1(r_1), u_2(r_1), u_3(r_1), u_4(r_1)]^T$ (图略) 及相应的最佳轨迹

$$\vec{X}(r_1) = [x_1(r_1), x_2(r_1), \dots, x_9(r_1)]^T \text{ (图略)}$$

根据得到的最优流型设计参数, 通过计算, 还可以得到 (部分结果见图 2~图 4): (1) 速度三角形全部参数沿叶高的分布; (2) 导叶及动叶 (相对) 马赫数沿叶高的分布; (3) 热力反动度沿叶高的分布; (4) 效率沿叶高的分布及级效率。

4.3 讨论与分析

(1) 图 4 为代价函数中代价项与迭代次数的关系。由图 4 可以看出, 只需迭代 3 次, 代价项就趋于零, 即得到满足约束条件的最优解。由此可以看出, 文内采用的计算方法和程序有较好的精确度和良好的收敛性。

(2) 从初值的最优控制以及计算得到的结果比较来看, 随着寻优路径的不断改变, 最优状态的一步步接近, 环量 C_{ur} 也不断随着变化, 而流

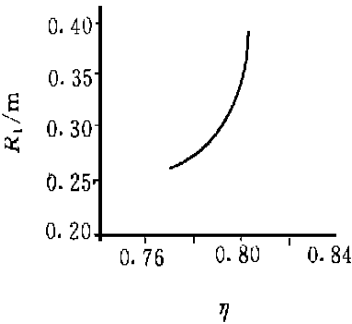


图 2 效率沿径向的分布

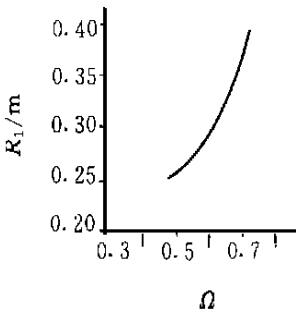


图 3 反动度沿径向的分布

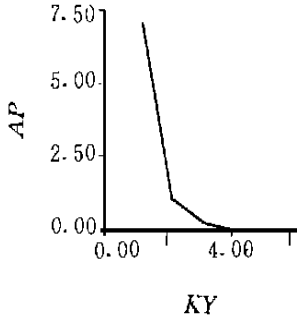


图 4 代价项与迭代次数的关系

线曲率半径 r_m 的变化很小。如为简化模型, 降低计算难度, 可考虑取消 r_m 的控制。

(3) 出于简化计算的考虑, 本文还将导、动叶出口截面参数分别进行优控(假设某一截面参数已知)。从计算结果来看, 分别优控与整级优控的结果(最优控制与最佳轨迹)是完全不同的, 分别优控能够达到的最大输出功率和级效率均较整级优控低得多, 这个结果与从状态空间的角度进行直观分析是一致的。整级最优控制的状态空间由全部状态向量组成, 其最佳轨迹与最优控制是在整个向量空间内搜索寻优得到的, 而分别优控的状态空间只是整体状态空间的一部分, 它的最佳轨迹及最优控制的获得都要受到状态空间的限制, 因而, 两个子空间内最优控制的迭加并不等于整个空间的最优控制。因此本文采用了整级优控的方法。

5 结 论

本文根据现代最优控制理论, 从建立物理模型、数学模型到编程上机计算求解, 较完整地解

决了最优流型问题。通过计算, 首先肯定了本文从一开始就强调的整级优控的思想; 其次从计算结果来看, 文内采用的方法和程序具有较好的精确度和良好的收敛性, 并且这些思想和方法可方便地推广到其它最优控制命题中去。

参考文献

- [1] 邹滋祥, 袁丁. 最优控制理论方法用于轴流透平最佳流型设计的物理模型和数学表达式 [R]. 上海: 中国工程热物理学会第六届年会, 1988
- [2] 袁丁等. 轴流透平级叶间环量及子午流线最优控制的研究 [R]. 西安: 全国动力机械与工程热物理青年工作者论文报告会, 1988
- [3] 谷传纲. 轴流式压气机最优流型的理论研究 [J]. 上海机械学院学报, 1982, (1): .
- [4] 邹滋祥. 轴流透平级几何参数与叶片扭曲规律联合优化设计计算方法 [J]. 航空动力学报, 1987, (4): 336- 341
- [5] 辛喆, 邹滋祥. 叶轮机械级几何参数的最优化设计 [J]. 中国农业大学学报, 1998, (6).

(责任编辑 杨再荣)

A Method for Flow Pattern Design of Axial Flow Turbine Stage

X N Zhe¹, ZOU Zixiang²

1. China Agricultural University, Beijing 100083, China;

2. Institute of Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China

Abstract: A full mathematical model of optimal flow pattern design with engineering constraints was put forward, based on modern optimal control theory. An optimal flow pattern design was presented for optimizing meridional channel of axial flow turbine. According to integral optimization of turbine stages, a full physical model and mathematical expression were put forward for proposition of optimal flow pattern, including all performance parameters in turbine stages. This problem was further recast into a typical form control to maximize specific performance index such as work or efficiency of stage with given initial state, fixed terminal condition and constraints for part of state terminal variables. The program was also worked out according penalty function method and conjugate gradient method. The optimal distribution of $C_{1u r1}$ (r_1) was obtained according to constraint conditions and maximized objective function.

Key words: turbine; optimal flow pattern design; theory of optimal control