

文章编号: 1000-8055(2002) 02-0201-04

声激励柱壳响应分析中的结合受纳函数

曹茂国, 李琳

(北京航空航天大学 动力系, 北京 100083)

摘要: 结合受纳函数(Joint Acceptance Function)是分析声载荷作用下结构特性时遇到的一个特殊的函数。这个函数不仅取决于结构模态,还取决于声场特性。本文以柱壳结构为研究对象,从分析结合受纳函数的定义、性质入手,研究如何利用结构分析中广泛采用的有限元数值结果来计算结合受纳函数,获得一种解决工程问题的通用方法。通过和解析解获得的结果比较说明这种结合受纳函数的数值计算方法是可行的。

关键词: 声激励; 随机振动; 响应分析; 结合受纳函数

中图分类号: V 231. 92

文献标识码: A

The Joint Acceptance Function in Response Analysis of Cylindrical Shell Excited by Noise

CAO Mao-guo, LI Lin

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: In analysis of structures excited by noise a special function—joint acceptance function should be calculated. This function represents the coupled relation between structural modes and sound modes. It is an integration of them in space. In general, this function can be obtained only in the case where the analytical expressions for both structural modes and sound modes have been established. However, for most engineering structures such as the casing of aero-engine it is difficult to obtain the analytical expression for its modes (either structural or sound). The article presents the research work in view of this problem. Considering the main structural type of the aero-engine, we take cylindrical shell as studied structural type. In the article it is studied how to calculate the joint acceptance function based on the result obtained by finite element method, which is used widely in structure analysis. A general numerical calculating method is presented. The result obtained by this method is compared with the analytical result.

Key words: acoustic excitation; random vibration; response analysis; joint acceptance function

1 引言

航空发动机是一个非常强大且复杂的噪声源,几乎所有的部件都能产生噪音。处于这种宽频带高能级声激励环境中的构件极易发生声疲劳。

声激励作用下的结构振动应力研究是声疲劳分析的基础。在分析声载荷作用下的结构特性时,一般会遇到一个特殊的函数—结合受纳函数(Joint Acceptance Function)。这个函数不仅取决于结构模态,还取决于声场特性,这给直接利用现有的结

收稿日期: 2001- 04- 20; 修订日期: 2001- 07- 12

基金项目: 航空科学基金资助项目(99C51078)

作者简介: 曹茂国(1966-),男,北京航空航天大学动力系博士生。

构分析方法—比如有限元法进行分析带来了困难。因此在多数涉及分析结合受纳函数的参考文献中,均采用了结构模态和声模态均具有解析解的简单几何结构^[1,2]。然而对于航空发动机中大多数旋转壳结构来说,例如受强噪声激励的机匣筒体,由于其结构质量分布不均匀或者由于安装边界条件复杂,很难获得确切的解析结果。本文从分析结合受纳函数的定义、性质入手,研究如何利用结构分析中广泛采用的有限元数值结果来计算结合受纳函数,获得一种解决工程问题的通用方法。

2 结合受纳函数的定义

由随机振动理论可以获得噪声载荷作用下薄壁柱壳结构位移响应的空间—频率功率谱密度函数^[3,4]为:

$$G_w(x, \theta, f) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{W_j(x, \theta) W_k(x', \theta)}{M_j M_k} \times H_j(f) H_k(-f) G_P^{jk}(f) \quad (1)$$

式中: $W_j(x, \theta)$, $W_k(x, \theta)$ 为模态位移量, M_j, M_k 为模态质量, $H_j(f)$, $H_k(f)$ 为结构的频率响应函数, N 为计算中截取的模态阶次, $G_P^{jk}(f)$ 为模态激励的功率谱密度函数, 其表达式为:

$$G_P^{jk}(f) = \int \int W_j(x, \theta) W_k(x', \theta) \cdot G_P(\vec{\epsilon}, f) ds ds' \quad (2)$$

式中: $G_P(\vec{\epsilon}, f)$ 为声载荷的互功率谱密度, $\vec{\epsilon}$ 表示 (x, θ) , (x', θ') 两点之间的矢量。

现设声载荷函数可按空间和时间变量分离, 且空间部分为由声模态刻划的确定性函数, 时间部分为平稳随机函数, 则噪声载荷场的互谱密度函数可表示为^[5]:

$$G_P(x, \theta, x', \theta', f) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N G_{mn}(f) \cdot \cos[m(\theta - \theta')] \cos[k_x^{mn}(x - x')] \quad (3)$$

式中: $\cos[m(\theta - \theta')] \cos[k_x^{mn}(x - x')]$ 为柱壳内部第 (m, n) 阶声模态函数(这里仅取了实部, 因为实部已包括了所需的声模态传播波形的信息), k_x^{mn} 为第 (m, n) 阶声模态的轴向波数, $G_{mn}(f)$ 为第 (m, n) 阶声模态的自功率谱密度, M, N 分别为声载荷场中声模态最高周向和径向波数。

将公式(3)代入公式(2), 得:

$$G_P^{jk} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N J_{jk}^{mn} \times G_{mn}(f) \quad (4)$$

$$J_{jk}^{mn} = \int \int W_j(x, \theta) W_k(x', \theta) \cos[m(\theta - \theta')] \cos[k_x^{mn}(x - x')] ds ds'$$

式中:

$$J_{jk}^{mn} = \int \int W_j(x, \theta) W_k(x', \theta) \cdot \cos[m(\theta - \theta')] \cos[k_x^{mn}(x - x')] ds ds' \quad (5)$$

定义为结合受纳函数。 J_{jk}^{mn} 的上标代表定义声模态的周向和径向波数, 下标代表结构模态的阶数。公式(5)表明结合受纳函数 J_{jk}^{mn} 由结构模态和声模态唯一确定, 因此它反映了声场的空间分布和结构模态之间空间耦合关系。

3 结合受纳函数的基本性质

对于某一确定的传播波型 (m, n, k_x^{mn}) , 可将结合受纳函数 J_{jk}^{mn} 按下标 j, k 排成矩阵形式, 称为结合受纳函数矩阵。由公式(5)可以获得结合受纳函数的如下性质:

结合受纳函数矩阵为一对称矩阵;

对角线上的元素为模态的自相关项引起的量;

非对角线上的元素为模态的互相关项引起的量;

由于声波的波数是频率的函数, 因此结合受纳函数矩阵中的元素也是频率的函数。

对于具有简单边界条件的薄壁柱壳, 按分离变量的思想, 结构模态振型总可以表示成如下的形式:

$$W_j(x, \theta) = \Phi_1(\theta) \times \Phi_2(x) \quad (6)$$

式中: Φ_1 代表周向坐标的函数, Φ_2 表示轴向坐标的函数。根据封闭式薄壁柱壳结构的模态振型的特点, Φ_1 可以表示成三角函数的形式, 而 Φ_2 的表示形式则取决于边界条件, 可取具有相同边界条件的梁的特征函数。

4 结合受纳函数的数值计算方法

对于大多数工程结构, 模态振型难以给出确切的解析函数。考虑到目前实际工程结构振型的理论解一般为基于有限元分析的数值形式, 因此这里给出一种与此数值形式相匹配的计算结合受纳函数的方法。

由公式(5)定义的结合受纳函数是空间坐标的四重积分。仔细分析被积函数并利用三角函数的特性可以将此四重积分分解成如下形式:

$$\begin{aligned} &= \int W_j(x, \theta) \cos(m\theta) \cos(k_x^{mn} x) \, ds \int W_k(x', \theta) \cos(m\theta) \cos(k_x^{mn} x') \, ds' + \\ &\int W_j(x, \theta) \sin(m\theta) \cos(k_x^{mn} x) \, ds \int W_k(x', \theta) \sin(m\theta) \cos(k_x^{mn} x') \, ds' + \\ &\int W_j(x, \theta) \cos(m\theta) \sin(k_x^{mn} x) \, ds \int W_k(x', \theta) \cos(m\theta) \sin(k_x^{mn} x') \, ds' + \\ &\int W_j(x, \theta) \sin(m\theta) \sin(k_x^{mn} x) \, ds \int W_k(x', \theta) \sin(m\theta) \sin(k_x^{mn} x') \, ds' \end{aligned} \tag{7}$$

公式(7) 将 J_{jk}^{mn} 分解为 8 个相似的二重积分的乘积求和形式, 所以说它们相似是因为它们的被积函数类似, 积分域相同, 每一个积分均可写为下列形式:

$$\begin{aligned} I &= \int f(x, \theta) \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} \int f(x, \theta) R \, dx \, d\theta \end{aligned} \tag{8}$$

利用这一特点可使问题简化。设结构模态 $W_j(x, \theta)$ 以有限元数值形式给出, 这时可直接采用数值积分计算(8)。为了保证取相同的积分点数时获得较高的精度, 本文采用 Gauss-Legendre 积分方法, 它在单一积分方向上取 s 个积分点时能达到 $2s-1$ 阶代数精度, 在本文中称之为高斯积分法。由于该方法要求的积分区间为 $[-1, 1]$, 因此对上面公式右边的积分形式进行坐标变换得到如下的公式:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int f(x, \theta) R \, dx \, d\theta \\ &= \frac{RL\pi}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \end{aligned} \tag{9}$$

式中:

$$\xi = \frac{2}{L} \left[x - \frac{L}{2} \right] \quad \eta = \frac{1}{\pi} (\theta - \pi) \tag{10}$$

现在可以利用高斯求积公式将二重积分式(9) 写成下面求和的形式:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int f(x, \theta) R \, dx \, d\theta \\ &= \frac{RL\pi}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \\ &= \frac{RL\pi}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s A_i A_j f(\xi_i, \eta_j) \end{aligned} \tag{11}$$

$$[J(200 \text{ Hz})] = \begin{bmatrix} J_{11}^{20} & J_{12}^{20} & J_{13}^{20} \\ J_{21}^{20} & J_{22}^{20} & J_{23}^{20} \\ J_{31}^{20} & J_{32}^{20} & J_{33}^{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.610\text{E} - 2 & 1.602\text{E} - 6 & 5.317\text{E} - 7 \\ 1.602\text{E} - 6 & 6.624\text{E} - 2 & 9.312\text{E} - 6 \\ 5.317\text{E} - 7 & 9.312\text{E} - 6 & 6.704\text{E} - 2 \end{bmatrix}$$

声波的传播频率为 1500 Hz 时的计算结果如下:

$$[J(1500 \text{ Hz})] = \begin{bmatrix} J_{11}^{20} & J_{12}^{20} & J_{13}^{20} \\ J_{21}^{20} & J_{22}^{20} & J_{23}^{20} \\ J_{31}^{20} & J_{32}^{20} & J_{33}^{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.610\text{E} - 2 & 1.660\text{E} - 6 & 1.672\text{E} - 6 \\ 1.660\text{E} - 6 & 6.624\text{E} - 2 & 2.717\text{E} - 6 \\ 1.672\text{E} - 6 & 2.717\text{E} - 6 & 6.704\text{E} - 2 \end{bmatrix}$$

式中: ξ 和 η 表示高斯积分点, A_i 和 A_j 表示高斯积分点相对应的求积加权系数, 积分点总数为 s^2 个。

公式(11) 又可以写成下面的形式:

$$I = \frac{RL\pi}{2} \{A_{s \times 1}\}^T [f_{s \times s}] \{A_{s \times 1}\} \tag{12}$$

式中: $[f_{s \times s}]$ 中的元素由每一被积函数在积分点上的值构成, $[f_{s \times s}]$ 的阶数由所取的积分点数 s 决定。

当积分点数 s 确定后, 对于公式(12) 表示的积分 I , $\{A_{s \times 1}\}$ 都相同, 所以结合受纳函数 J_{jk}^{mn} 的主要计算工作转为计算公式(7) 中每个重积分的被积函数在高斯积分点上的值。对于以有限元数值形式给出的结构模态位移量 $W_j(x, \theta)$, 若高斯积分点与有限元的节点不精确重合时, 可用与其相距最近的点的位移值插值的方法获得。另外, 也可以在结构上划分较小的积分区域(或直接采用有限元单元), 在每个积分区域上分别计算积分值, 然后求和。这时要注意积分区间的变化和用插值的方法获得被积函数在高斯积分点上的值^[6]。

现在研究 s 的选取对结果的影响, 以一个两端简支的柱壳为例。柱壳内径 253 mm, 长 640 mm, 壁厚 0.8 mm。采用有限元软件 ANSYS 计算出其前三阶模态(这里为说明问题仅取三阶), 构成 3×3 阶的结合授纳函数矩阵。现设声波模态阶次为(2, 0) 计算结合授纳函数矩阵中的每个元素。

(1) 当 $s = 5$ 时, 即每一方向上取 5 个积分点, 整个积分域上共 25 个积分点, 取声波的传播频率为 200 Hz 时的计算结果如下:

(2) 当 $s = 3$ 时,即每一方向上取 3 个积分点,整个积分域上共 9 个积分点。取声波的传播频率为 200 Hz 时的计算结果如下:

$$[J(200\text{ Hz})] = \begin{bmatrix} J_{11}^{20} & J_{12}^{20} & J_{13}^{20} \\ J_{21}^{20} & J_{22}^{20} & J_{23}^{20} \\ J_{31}^{20} & J_{32}^{20} & J_{33}^{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.610\text{E} - 2 & 5.978\text{E} - 6 & 5.903\text{E} - 6 \\ 5.978\text{E} - 6 & 6.624\text{E} - 2 & 9.497\text{E} - 6 \\ 5.903\text{E} - 6 & 9.497\text{E} - 6 & 6.704\text{E} - 2 \end{bmatrix}$$

声波的传播频率为 1500 Hz 时的计算结果如下:

$$[J(1500\text{ Hz})] = \begin{bmatrix} J_{11}^{20} & J_{12}^{20} & J_{13}^{20} \\ J_{21}^{20} & J_{22}^{20} & J_{23}^{20} \\ J_{31}^{20} & J_{32}^{20} & J_{33}^{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.610\text{E} - 2 & 4.105\text{E} - 6 & 4.157\text{E} - 6 \\ 4.105\text{E} - 6 & 6.624\text{E} - 2 & 6.729\text{E} - 6 \\ 4.157\text{E} - 6 & 6.729\text{E} - 6 & 6.704\text{E} - 2 \end{bmatrix}$$

(3) 将公式(5)中的结构模态采用两端简支柱壳模型的振型解析函数表示,直接积分。当声波的传播频率为 200 Hz 和 1500 Hz 时,计算结果如下:

$$[J(200\text{ Hz})] = [J(1500\text{ Hz})] = \begin{bmatrix} 7.667\text{E} - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7.667\text{E} - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7.667\text{E} - 2 \end{bmatrix}$$

对上面的计算结果进行分析可以获得如下的结论:

(1) 在高斯积分中积分点数取 3 或 5 时,对结果影响很小,取 $s = 3$ (采用 9 个积分点)完全可以保证工程精度要求。

(2) 数值分析结果与解析分析结果相当接近:结合受纳函数矩阵中的对角线元素不随频率变化,非对角线元素与对角线元素相比很小可以忽略。

结合受纳函数数值分析与解析分析的差异主要是由于下面的因素引起的:在有限元的计算中对模态位移量进行了质量矩阵归一化处理。在采用解析函数表示结构振型计算结合受纳函数时,也要对其进行质量归一化处理,由于没有考虑薄壁柱壳弯曲模态振型分量中周向和轴向模态分量,使模态质量偏小,所以采用两端简支柱壳模型的振型解析函数时结合受纳函数值偏大。

从计算结果看,本文提出的结合受纳函数的数值计算方法是合理的。

5 结 论

将高斯积分引入结合受纳函数的计算后,可

以直接利用结构有限元分析的结果,从而解决了工程结构中结合受纳函数的分析问题。本文的研究中采用的声载荷模型是基于实测值的半解析模型^[5],对于其他形式的声载荷模型,这里提出的方法也是适用的。

参考文献:

[1] Norton M P.Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers[M]. Cambridge University Press, 1989.

[2] Blevins R D. An Approximate Method for Sonic Fatigue Analysis of Plates and Shells[J]. Journal of Sound and Vibration, 1989, 129(1): 51- 71.

[3] 朱位秋著. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

[4] 曹茂国. 噪声载荷作用下薄壁柱壳随机振动响应的研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2001.

[5] Li Lin, Cao Maoguo. The Model of Random Noise Load on Inner Surface of the Cylindrical Shell [R]. 17th International Conference on Acoustics, Rome, Sept. 2001.

[6] 饶寿期. 有限元法和边界元法基础[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1990

(责任编辑 王震华)