

文章编号: 1000-8055(2002)05-0610-05

机动飞行飞行器内具有初始弯曲 和刚度不对称的转子运动模型

林富生, 孟 光

(上海交通大学 振动、冲击、噪声国家重点实验室, 上海 200030)

摘要: 本文建立了位于机动飞行飞行器内且同时具有初始弯曲、不对称刚度和质量不平衡的单盘 Jeffcott 转子的动力学模型。当飞行器静止时, 设相关参数为零后该模型与相应地面转子系统的数学模型完全相同。应用该模型可数值仿真研究飞行器运动时位于飞行器内的等转速、等加速、等减速运行转子的动态特性, 研究飞行器不同飞行速度和加速度对转子动力学特性的影响, 分析飞行器飞行时转子出现故障时的响应特性, 从而为机动飞行器内转子的动力学分析和故障诊断提供依据。

关键词: 机动飞行; 刚度不对称; 初始弯曲; 转子动力学

中图分类号: V 231.96

文献标识码: A

Mathematical Modeling of a Maneuvering Asymmetric Rigidity Rotor with Initial Bending

L N Fu-sheng, M E N G Guang

(Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: A mathematical model of an unbalanced rotor system located in aircraft with asymmetric rigidity and initial bending is given in this paper. The model for the maneuvering rotor can be used to study the dynamic characteristics of a rotor running with constant rotating speed, constant acceleration or deceleration, to investigate the influence of the velocity and acceleration of aircraft on the rotor dynamics, to analyze the amplitude response of a rotor and to diagnose the fault of a maneuvering rotor.

Key words: maneuvering rotor; asymmetric rigidity; initial bending; rotor dynamics

1 前 言

以往在研究转子的动力学特性时, 都将转子设为水平(考虑重力影响)或垂直放置(不考虑重力影响)^[1~5], 但实际中飞行器的发动机转子轴可能处于不同的位置, 更进一步的情况是当飞行器作机动飞行时, 置于飞行器内部的转子轴的位置、转子的运动及受力都将发生变化, 重力也可与转

轴成任意夹角。转子支承的位置变化必然使转子系统的动能受飞行器飞行速度和加速度的影响, 而转子系统的势能则受转子重力的影响^[6]。重力方向与转子轴向的夹角发生变化, 使得重力在转子横向和轴向都产生分量, 转子的横向不平衡响应就会因重力分量的不同而发生变化。研究飞行器在不同飞行规律下转子的不平衡响应, 将有助于进一步了解动态转子的动力学特性, 较真实地

收稿日期: 2001- 10- 29; 修订日期: 2002- 04- 08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19972054); 广东自然科学基金资助项目(990839)

作者简介: 林富生(1965-), 男, 江苏东台人, 机械高级工程师, 上海交通大学振动、冲击、噪声国家重点实验室博士生

质心 C 在 $O_1X_2Y_2Z_2$ 中的坐标:

$$\begin{cases} x_{2C} = x_{1C} \cos \alpha \\ y_{2C} = y_{1C} \\ z_{2C} = -x_{1C} \sin \alpha \end{cases}$$

质心 C 在 $O_1X_2Y_2Z_2$ 中的速度:

$$\begin{cases} \dot{x}_{2C} = \dot{x}_{1C} \cos \alpha - x_{1C} \dot{\alpha} \sin \alpha \\ \dot{y}_{2C} = \dot{y}_{1C} \\ \dot{z}_{2C} = -\dot{x}_{1C} \sin \alpha - x_{1C} \dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}$$

质心 C 在 $OXYZ$ 中的坐标为:

$$\begin{cases} x_C = x + x_{2C} \\ y_C = y_{2C} \\ z_C = z + z_{2C} \end{cases}$$

坐标系 $O_1X_2Y_2Z_2$ 在坐标系 $OXYZ$ 中平动, 牵连速度为 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 。则质点 C 的绝对速度为:

$$\begin{cases} \dot{x}_C = \dot{x} + \dot{x}_{2C} \\ \dot{y}_C = \dot{y} + \dot{y}_{2C} \\ \dot{z}_C = \dot{z} + \dot{z}_{2C} \end{cases}$$

系统的动能函数为:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) +$$

$$\frac{1}{2} (J_\xi \bar{\omega}_\xi^2 + J_\eta \bar{\omega}_\eta^2 + J_\zeta \bar{\omega}_\zeta^2 -$$

$$2J_{\xi\eta} \bar{\omega}_\xi \bar{\omega}_\eta - 2J_{\eta\zeta} \bar{\omega}_\eta \bar{\omega}_\zeta - 2J_{\xi\zeta} \bar{\omega}_\xi \bar{\omega}_\zeta)$$

其中: 第二项为转动动能 T_r , 第二项中 J_ξ, J_η, J_ζ 分别为圆盘质心对 ξ, η, ζ 轴的转动惯量, $J_{\xi\eta}, J_{\eta\zeta}, J_{\xi\zeta}$ 为圆盘的惯量积。 T_r 中后三项均等于零。 $\bar{\omega}_\xi, \bar{\omega}_\eta, \bar{\omega}_\zeta$ 分别为动坐标系转动角速度和圆盘角速度在动坐标系三坐标轴上的投影之和。考虑质心与盘心的距离, 得:

$$\left. \begin{aligned} m \left[\ddot{\xi} - \dot{\beta}^2 \xi + 2\dot{\beta} \dot{\eta} + \ddot{\beta} \eta - \left(\frac{\alpha^2 \sin 2\beta}{2} \right) \eta + \frac{\alpha^2 (1 + \cos 2\beta)}{2} \xi \right] + k_\xi \xi + (c + c_1) \dot{\xi} + c \dot{\beta} \eta = \\ m e \dot{\beta}^2 \sin \theta - m e \ddot{\beta} \cos \theta + k_\xi \xi - [m g \cos \alpha - m e \alpha^2 \sin (\beta + \theta) + \\ c (\dot{x} \cos \alpha - \dot{z} \sin \alpha) + m \ddot{x} \cos \alpha - m \ddot{z} \sin \alpha] \cos \beta \\ m \left[\ddot{\eta} - \dot{\beta}^2 \eta + 2\dot{\beta} \dot{\xi} + \ddot{\beta} \xi - \left(\frac{\alpha^2 \sin 2\beta}{2} \right) \xi + \frac{\alpha^2 (1 - \cos 2\beta)}{2} \eta \right] + k_\eta \eta + (c + c_1) \dot{\eta} + c \dot{\beta} \xi = \\ m e \dot{\beta}^2 \cos \theta - m e \ddot{\beta} \sin \theta + k_\eta \eta - [m g \cos \alpha - m e \alpha^2 \sin (\beta + \theta) + \\ c (\dot{x} \cos \alpha - \dot{z} \sin \alpha) + m \ddot{x} \cos \alpha - m \ddot{z} \sin \alpha] \sin \beta \\ J_p \ddot{\beta} + \{ (\ddot{\xi} + 2\dot{\beta} \dot{\eta}) (\eta + e \cos \theta) - (\ddot{\eta} + 2\dot{\beta} \dot{\xi}) (\xi + e \sin \theta) + \dot{\beta}^2 [(\eta + e \cos \theta)^2 + \\ (\xi + e \sin \theta)^2] - \alpha^2 [\cos 2\beta (\xi + e \sin \theta) (\eta + e \cos \theta) + \sin 2\beta \frac{(\eta + e \cos \theta)^2 - (\xi + e \sin \theta)^2}{2}] \\ + [\eta \cos \beta - \xi \sin \beta + e \cos (\beta + \theta)] (\ddot{x} \cos \alpha \sin \alpha) \} + m g \cos \alpha [(\eta + e \cos \beta) \cos \beta - \\ (\xi + e \sin \theta) \sin \beta] + c [(\dot{\xi} + \dot{\beta} \eta) \eta - (\dot{\eta} + \dot{\beta} \xi) \xi + (\dot{x} \cos \alpha - \dot{z} \sin \alpha) (\eta \cos \beta - \xi \sin \beta)] + \\ c_1 \dot{\beta} (\xi^2 + \eta^2) = M_z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\begin{cases} J_\xi = J_d + m (e \sin \theta)^2 \\ J_\eta = J_d + m (e \cos \theta)^2 \\ J_\zeta = J_p \end{cases}$$

其中: J_d 为圆盘的赤道转动惯量, J_p 为圆盘的极转动惯量。

动坐标系由参考坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$ 经一次转动而得。即绕 O_1Z_1 转动 $\beta = \bar{\omega}$ 至 $O_1\xi\eta\zeta$ 与 O_1Z_1 重合。则转动的角速度在动坐标系三个轴上的分量为:

$$\bar{\omega}_\xi = 0, \quad \bar{\omega}_\eta = 0, \quad \bar{\omega}_\zeta = -\dot{\beta}$$

圆盘在动坐标系中转动角速度的分量为:

$$\bar{\omega}_\xi = \bar{\omega}_\eta = \bar{\omega}_\zeta = 0$$

则 $\bar{\omega}_\xi = 0, \quad \bar{\omega}_\eta = 0, \quad \bar{\omega}_\zeta = -\dot{\beta}$

将以上关系式代入, 即得转动动能 T_r 为:

$$T_r = (1/2) \dot{\beta}^2 J_p$$

系统的势能函数为:

$$V = \frac{1}{2} [k_\xi (\xi - \xi_0)^2 + k_\eta (\eta - \eta_0)^2] + m g x_C$$

系统的耗散函数为:

$$\Phi = \frac{1}{2} c [\dot{x}_{O_3}^2 + \dot{y}_{O_3}^2 + \dot{z}_{O_3}^2] + \frac{1}{2} c_1 \cdot [\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\beta}^2 \xi^2 + \dot{\beta}^2 \eta^2]$$

其中: $(\dot{x}_{O_3}, \dot{y}_{O_3}, \dot{z}_{O_3})$ 为 O_3 点的速度。

作用在系统上的广义力为:

$$Q = [0 \quad 0 \quad 0 \quad M_z]^T$$

其中: M_z 为外力矩。

由 Lagrange 第二类方程, 得盘心在动系中的运动方程(1)。

其中: m 为圆盘质量, c 为圆盘及轴受到的粘性外阻尼系数, c_1 为弹性轴的内阻尼系数, k_ξ 及 k_η 分别为轴在两相应平面内的弯曲刚度。由假设已知 $\zeta = 0$ 。

在第一、二方程两边同除以 $m e_0 \omega^2$, 第三方程两边同除以 $J_p \omega^2$, 其中 e_0 为参考偏心距。令 $\tau = \omega t$, 则:

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \omega \frac{d\beta}{d\tau} = \omega \beta' \\ \ddot{\beta} &= \omega^2 \frac{d^2\beta}{d\tau^2} = \omega^2 \beta''\end{aligned}$$

整理得圆盘中心在动坐标系 $O_1 \xi \eta \zeta$ 中的无量纲运动微分方程组(2)。

在无量纲化推导中假设圆盘为均质圆盘, 则 $J_p = m R^2 / 2$, 其中 R 为圆盘的半径。设

$$e_R = 2(e_0/R)^2$$

其余参数分别为:

$$\begin{aligned}\xi_d &= \frac{\xi}{e_0}, \quad \eta_d = \frac{\eta}{e_0}, \quad \omega_\xi = \sqrt{\frac{k_\xi}{m}} \\ \omega_\eta &= \sqrt{\frac{k_\eta}{m}}, \quad \epsilon_\xi = \frac{c}{2m \omega_\xi}, \quad \epsilon_{\xi 1} = \frac{c_1}{2m \omega_\xi}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \xi_d'' + \beta''(\eta_d + U \cos \theta) + \frac{2(\epsilon_\xi + \epsilon_{\xi 1})}{\Omega_\xi} \xi_d' + \left[\frac{1}{\Omega_\xi^2} - \beta'^2 - \frac{1}{2} \alpha'^2 (1 + \cos 2\beta) \right] \cdot \\ & \quad \xi_d + 2\beta' \eta_d + \left(\frac{2\epsilon_\xi}{\Omega_\xi} \beta' - \frac{1}{2} \alpha'^2 \sin 2\beta \right) \eta_d - U \beta'^2 \sin \theta + \\ & \quad \left[\frac{G_e}{\Omega_\xi^2} \cos \alpha - U \alpha'^2 \sin(\beta + \theta) + \frac{2\epsilon_\xi}{\Omega_\xi} (x_d' \cos \alpha - z_d' \sin \alpha) + x_d'' \cos \alpha - z_d'' \sin \alpha \right] \cos \tau = \frac{\xi_{sd}}{\Omega_\xi^2} \\ & \eta_d'' - \beta''(\xi_d + U \sin \theta) + \frac{2(\epsilon_\eta + \epsilon_{\eta 1})}{\Omega_\eta} \eta_d' + \left[\frac{1}{\Omega_\eta^2} - \beta'^2 - \frac{1}{2} \alpha'^2 (1 - \cos 2\beta) \right] \cdot \\ & \quad \eta_d - 2\beta' \xi_d - \left(\frac{2\epsilon_\eta}{\Omega_\eta} \beta' + \frac{1}{2} \alpha'^2 \sin 2\beta \right) \xi_d - U \beta'^2 \cos \theta + \\ & \quad \left[\frac{G_e}{\Omega_\eta^2} \cos \alpha - U \alpha'^2 \sin(\beta + \theta) + \frac{2\epsilon_\eta}{\Omega_\eta} (x_d' \cos \alpha - z_d' \sin \alpha) + x_d'' \cos \alpha - z_d'' \sin \alpha \right] \sin \tau = \frac{\eta_{sd}}{\Omega_\eta^2} \\ & \beta'' \{ 1 + e_R [(\eta_d + U \cos \theta)^2 + (\xi_d + U \sin \theta)^2] \} + e_R \{ (\xi_d'' + 2\beta' \eta_d) (\eta_d + U \cos \theta) - \\ & \quad (\eta_d'' - 2\beta' \xi_d) (\xi_d + U \sin \theta) \} - \alpha'^2 \{ \cos 2\beta (\xi_d + U \sin \theta) (\eta_d + U \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} \sin 2\beta \cdot \\ & \quad ((\eta_d + U \cos \theta)^2 - (\xi_d + U \sin \theta)^2) + [(\eta_d \cos \beta - \xi_d \sin \beta + U \cos(\beta + \theta)) \cdot \\ & \quad (x_d'' \cos \alpha - z_d'' \sin \alpha)] \} + \frac{2\epsilon_{\xi eR}}{\Omega_\xi} \beta' (\xi_d'' + \eta_d) + \frac{2\epsilon_{\eta eR}}{\Omega_\eta} [(\xi_d' + \beta' \eta_d) \eta_d - (\eta_d' - \beta' \xi_d) \xi_d + \\ & \quad (x_d' \cos \alpha - z_d' \sin \alpha) (\eta_d \cos \alpha - \xi_d \sin \beta)] + \frac{G_e e_R}{\Omega_\xi^2} \cos \alpha [(\eta_d + U \cos \theta) \cos \beta - \\ & \quad (\xi_d + U \sin \theta) \sin \beta] = \frac{M_p}{\Omega_\xi^2} \cdot M_{zp} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\epsilon_\eta &= \frac{c}{2m \omega_\eta}, \quad \epsilon_{\eta 1} = \frac{c_1}{2m \omega_\eta}, \quad \Omega_\xi = \frac{\omega}{\omega_\xi} \\ \Omega_\eta &= \frac{\omega}{\omega_\eta}, \quad \xi_{sd} = \frac{r_b \sin \varphi}{e_0}, \quad \eta_{sd} = \frac{r_b \cos \varphi}{e_0}\end{aligned}$$

$$G_e = \frac{g}{\omega_\xi^2 e_0}, \quad U = \frac{e}{e_0}, \quad x_d = \frac{x}{e_0}$$

$$z_d = \frac{z}{e_0}, \quad M_p = \frac{M_{z0}}{J_p \omega_\xi^2}, \quad M_{zp} = \frac{M_{z0}}{M_{z0}}$$

式中: G_e 为无量纲重力参数, M_p 为无量纲扭矩系数, M_{zp} 为无量纲外力矩。

设 O_1 点在 $OXYZ$ 坐标系中作平面运动, 其运动方程为:

$$x = x(t), \quad y = 0, \quad z = z(t)$$

则:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{dx}{dz} = \frac{dx}{dz} \times \left(\frac{dz}{dt} \right)^{-1} = \frac{x'}{z'} = \frac{x'}{z'} \\ \alpha &= \arctg \left(\frac{x'}{z'} \right), \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \\ \sin \alpha &= \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}, \quad \alpha' = \frac{x z'' - z z''}{z'^2}\end{aligned}$$

假设飞行器在 $O_X Z$ 平面的第一、第四象限运动, 且向 Z 正方向运动, 所以 α 取 $\arctg \alpha$ 的主值, 即 $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ 。

给定飞行器的运动轨迹即给定 $x(\tau), z(\tau)$ 则 $\cos \alpha, \sin \alpha$ 及 α 可知。代入方程组 (2), 并用数值方法求解, 得圆盘盘心在动系 $O_1 \xi \eta \zeta$ 中的运动轨迹, 将结果转化为坐标系 $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ 中的值, 据此进行分析并与飞行器静止时 (固定于地面) 的水平转子的结果进行比较。 $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ 坐标系在飞行器静止时即为转子动力学分析中常用的固定坐标系。

3 数学模型的简化与比较

在代表模型的方程组 (2) 中, 第三个方程非常复杂。为了进行分析, 需对模型进行简化。简化主要针对第三个方程。为了求得 β'' 和 β' , 先假设转子的运动规律, 再推算相应的 β'' 表达式。具体地说, 如转子作定转速 ω 运行, 则 $\beta'' = 0, \beta' = \omega$ 如转子作等变速运行, 则 $\beta'' = A, \beta' = \omega + A\tau$, 其中: A 为定值, ω 为始角速度。等加速运行时 $A > 0$, 等减速运行时 $A < 0$ 。将 β'' 和 β' 的表达式与方程组的前两个方程组成新的方程组, 得到简化的微分方程模型。在求等变速情况的解时, 先设 $A = 0$ 以得到方程组的初值条件, 然后重新计时, 迭代求解转子等变速的响应。

本文所建模型考虑了飞行器的机动飞行。而当飞行器静止时, 与飞行器运动相关的参数值为零。退化后的模型与置于地面的同样具有初始弯曲和不对称刚度的水平 Jeffcott 转子的模型完全相同。

4 对所建模型的应用展望

作为系列研究的第一部分, 本文导出了位于机动飞行器内且同时具有初始弯曲、不对称刚度和质量不平衡的单盘 Jeffcott 转子的动力学模型。当飞行器静止时, 方程退化为地面固定转子系统的数学模型。

在系列研究的后续部分, 可应用该模型数值仿真研究飞行器运动时位于飞行器内的等转速、等加速、等减速运行转子的动态特性, 揭示飞行器不同飞行速度和加速度对转子动力学特性的影响, 研究飞行器飞行时转子出现故障时的响应特性, 从而为空中运行转子的故障诊断提供新的依据。限于篇幅, 本文只给出了模型。在作者的后续文章中详细研究了各种情形时的影响, 结果发现处于飞行器中的转子圆盘中心的振幅变化曲线呈现更丰富的形态, 与支承处于静止状态的转子响应应具有明显的不同。此外也发现了许多过去研究所未揭示的现象。

参考文献

- [1] 顾家柳, 丁奎元, 刘启洲, 等. 转子动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1985
- [2] 钟一谔, 何衍宗, 王正, 等. 转子动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987
- [3] Lee A. C, Kang Y, Tsai K. L., Hsiao K. M. Transient Analysis of an Asymmetric Rotor-Bearing System During Acceleration [J]. J. of Engineering for Industry. Trans. of ASME, 1992, 114(4): 465- 475
- [4] Ganesan R, Sankar T. S. Resonant Oscillations and Stability of Asymmetric Rotors [A]. Proc. of the 14th Biennial ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise [C]. 1993, 56: 19- 22
- [5] 张文. 转子动力学理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1990
- [6] 吕学富, 陆毓峰, 霍秀芳, 等. 飞行器飞行力学[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1995
- [7] Keogh P. S, Morton P. G. Dynamic Nature of Rotor Thermal Bending due to Unsteady Lubricant Shearing within a Bearing [A]. Proc. of The Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences [C]. 1994, 445 (1924): 273- 290
- [8] Rao J. S. A Note on Jeffcott Warped Rotor [J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(5): 563- 575

(责任编辑 吴一黄)