

## 行星轮系动态特性分析

魏大盛, 王延荣

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

**摘要:** 针对某一具有五个行星轮的 2K-H 型行星齿轮传动系统, 建立了多自由度系统的动力学模型, 采用 Gill 法对系统的运动微分方程进行数值积分, 得到了此多自由度系统在刚度激励作用下的动态响应, 并计算了轮齿间的动态载荷, 其中着重考虑了齿轮接触比和太阳轮中心浮动对动态特性的影响。

**关键词:** 航空、航天推进系统; 行星轮系; 动态特性; 刚度激励

**中图分类号:** V231.92

**文献标识码:** A

### The Dynamic Characteristics Analysis of Planet Gear Train

WEI Da-sheng, WANG Yan-rong

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract:** The multi-degree of freedom model has been established to describe the dynamic behavior of a planet gear train of the 2K-H type with five planet gears. The numerical integration of the equations of motion for the system has been done by the use of Gill's method. The dynamic response of the system under the stiffness excitation induced by the mesh between gears has been obtained, and the dynamic load of gears has been determined. The effects of the contact ratio of gears and the floating motion of the centroid of the sun gear on the dynamic characteristics have been discussed emphatically during the mathematical manipulation.

**Key words:** aerospace propulsion system; planet gear train; dynamic characteristics; stiffness excitation

## 1 引言

行星齿轮传动是一种重要的传动形式, 应用十分广泛。由于行星齿轮系统的复杂性, 以往的研究工作多局限于系统的静态性能, 近年来, 研究工作已转向动态特性方面<sup>[1~3]</sup>。齿轮系统的动态激励分为内部激励和外部激励两类, 与一般机械系统的不同之处主要在于它的内部激励。内部激励是指轮齿啮合时产生的动态激励, 主要包括以下三种形式: 刚度激励、误差激励和啮合冲击激励。其中, 刚度激励的产生是由于啮合过程中参与啮合的齿对数目发生交替变化, 使齿侧载荷发生周

期性的阶跃变化, 鉴于刚度激励在内部激励中的主导作用, 本文将着重分析刚度激励的影响。

## 2 轮齿的啮合刚度

将轮齿简化为如图 1 所示的弹性基础上的变截面悬臂梁, 轮齿受到垂直于齿廓、沿啮合线方向的集中载荷作用, 将产生三种主要的弹性变形: 齿部的弯曲及剪切变形; 齿根弹性引起的附加变形; 啮合点的接触变形<sup>[1]</sup>。单齿刚度定义为轮齿齿侧在单位力作用下产生的变形(上述三种主要变形之和)的倒数。根据 Cornell 的分析<sup>[1]</sup>, 若齿宽  $B$  与节圆齿厚  $S$  之比  $B/S > 5$ , 则可视轮齿为宽齿, 处

于平面应变状态;若  $B/S < 5$ , 则轮齿为窄齿, 处于平面应力状态。

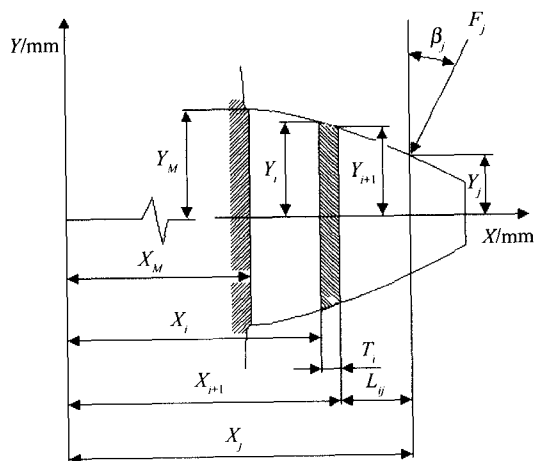


图 1 啮合刚度计算用坐标系

Fig. 1 Coordinate system for the calculation of the mesh stiffness

本文中的轮齿均为宽齿,可按平面应变状态进行处理。当几对轮齿同时参与啮合时,其综合效应应对啮合刚度的影响可由下式计算:

$$K_{\text{SUM}} = \sum_{i=1}^n K_{S_j} \quad (1)$$

式中:  $K_{\text{SUM}}$  为轮齿综合啮合刚度;  $K_{S_j}$  为啮合点  $j$  处的单齿啮合刚度;  $n$  为同时参与啮合的齿对数。

实际分析中,首先求出齿侧点  $j$  在单位法向力作用下的三种变形,并进行叠加得到啮合点的总变形:

$$\delta_j = \delta_{Bj} + \delta_{Mj} + \delta_{Cj} \quad (2)$$

式中:  $\delta_{Bj}$  为轮齿齿部的弯曲和剪切所引起的啮合点  $j$  处的变形,  $\delta_{Mj}$  为齿根弹性引起的啮合点处的附加变形,  $\delta_{Cj}$  为啮合点处的接触变形。

然后,按式(1)计算齿侧点  $j$  处的刚度,具体计算过程见文献[4]。

啮合刚度的计算结果如图 2 所示,对于高接触比(2~3),太阳轮/行星轮啮合刚度的变化范围是  $6.019 \times 10^5 \sim 7.599 \times 10^5$  N/mm,行星轮/齿圈啮合刚度的变化范围是  $5.852 \times 10^5 \sim 8.679 \times 10^5$  N/mm;对于普通接触比(1~2),其啮合刚度的变化与图 2 类似,此时,太阳轮/行星轮啮合刚度的变化范围是  $4.564 \times 10^5 \sim 7.413 \times 10^5$  N/mm,行星轮/齿圈啮合刚度的变化范围是  $4.85 \times 10^5 \sim 9.565 \times 10^5$  N/mm。

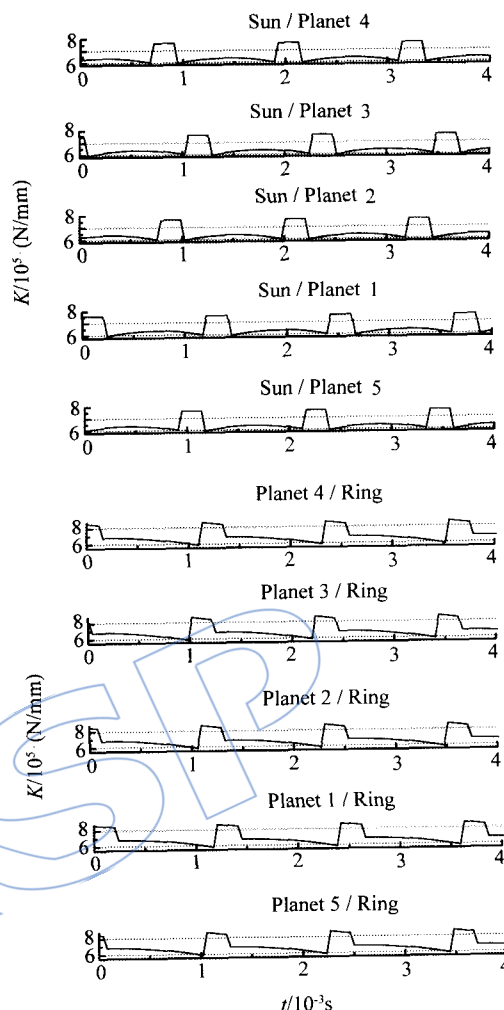


图 2 啮合刚度(接触比 2~3)

Fig. 2 The mesh stiffness of gears with the contact ratio of 2~3

### 3 系统多自由度模型的建立

针对某现役直升机主减速器的具有 5 个行星齿轮(直齿圆柱齿轮)的 2K-H 型传动系统,可作如下的简化及假设:

(1) 将各齿轮简化为具有集中质量的惯性元件,采用弹簧和牛顿阻尼器连接,弹簧刚度等于齿对啮合刚度,随时间周期变化,原动机和负载简化为具有转动惯量的转子。

(2) 认为振动发生在行星轮平面内,忽略平面外的振动。

(3) 假设轮齿间的啮合作用只发生在理论啮合线上。

(4) 允许太阳轮浮动,但只限于平面运动,不允许其摆动。

在此基础上,建立了 11 个自由度的(扭转)振动模型,各自由度分别为太阳轮  $\psi_s$ 、五个行星轮  $\psi_i$ 、齿圈  $\psi_R$ 、原动机  $\psi_D$  和负载  $\psi_L$ ,以及太阳轮中心

的两个自由度  $X_s$  和  $Y_s$ <sup>[3]</sup>,如图 3 所示。

经推导,可得系统的运动微分方程如下:

原动机:

$$J_D \ddot{\psi}_D + C_{DS} (\dot{\psi}_D - \dot{\psi}_s) + K_{DS} (\psi_D - \psi_s) = T_{in} \quad (3)$$

太阳轮:

$$J_s \ddot{\psi}_s + C_{DS} (\dot{\psi}_s - \dot{\psi}_D) + K_{DS} (\psi_s - \psi_D) + \sum_{i=1}^n (R_{BCS} \cdot F_{SPi}) = 0 \quad (4)$$

$$M_s \ddot{X}_s + C_s \dot{X}_s + K_s X_s + \sum_{i=1}^n [F_{SPi} \cdot \cos \alpha_i] = 0 \quad (5)$$

$$M_s \ddot{Y}_s + C_s \dot{Y}_s + K_s Y_s + \sum_{i=1}^n [F_{SPi} \cdot \sin \alpha_i] = 0 \quad (6)$$

行星轮  $i$ :

$$J_P \ddot{\psi}_i - R_{BCP} (F_{PRi} - F_{SPi}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (7)$$

齿圈:

$$J_R \ddot{\psi}_R + C_{LS} (\dot{\psi}_R - \dot{\psi}_L) + K_{LS} (\psi_R - \psi_L) + \sum_{i=1}^n (R_{BCR} \cdot F_{PRi}) = 0 \quad (8)$$

式中:

$$J_R = (J_C + 5J_P) + (M_C + 5M_P) R_{BCR}^2$$

为等效的齿圈转动惯量。

负载:

$$J_L \ddot{\psi}_L + C_{LS} (\dot{\psi}_L - \dot{\psi}_R) + K_{LS} (\psi_L - \psi_R) = -T_{out} \quad (9)$$

式(7)中的变量  $F_{SPi}$  和  $F_{PRi}$  分别代表第  $i$  个外啮合(太阳轮/行星轮)和内啮合(行星轮/齿圈)的齿轮副齿间动载,可表示如下:

$$F_{SPi} = C_{SPi} [R_{BCS} \cdot \dot{\psi}_s - R_{BCP} \cdot \dot{\psi}_i + X_s \cos \alpha_i + Y_s \sin \alpha_i] + K_{SPi} [R_{BCS} \cdot \psi_s - R_{BCP} \cdot \psi_i + X_s \cos \alpha_i + Y_s \sin \alpha_i] \quad (10)$$

$$F_{PRi} = C_{PRi} [R_{BCR} \cdot \dot{\psi}_R - R_{BCP} \cdot \dot{\psi}_i] + K_{PRi} [R_{BCR} \cdot \psi_R - R_{BCP} \cdot \psi_i] \quad (11)$$

以上式中:

$$\alpha_i = \frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{2(i-1)\pi}{n} \quad (12)$$

式中:  $R_{BCS}$ ,  $R_{BCP}$  和  $R_{BCR}$  分别为太阳轮、行星轮、齿圈基圆半径,  $\alpha$  为压力角,  $\alpha_i$  为第  $i$  个行星轮的角向位置。

以上式中的等效轴阻尼采用下式计算<sup>[3]</sup>,其中临界阻尼比  $\zeta_s = 0.005$ 。

$$C_{DS} = 2\zeta_s \sqrt{\frac{K_{DS}}{1/M_D + 1/M_s}} \quad (13)$$

$$C_{LS} = 2\zeta_s \sqrt{\frac{K_{LS}}{1/M_R + 1/M_L}} \quad (14)$$

轮齿啮合的等效阻尼采用下式计算,啮合轮齿的临界阻尼比  $\zeta_G$  在 0.03 到 0.10 之间<sup>[3]</sup>。

$$C_{SPi} = 2\zeta_G \sqrt{\frac{K_{SPi}}{1/M_s + 1/M_P}} \quad (15)$$

$$C_{PRi} = 2\zeta_G \sqrt{\frac{K_{PRi}}{1/M_P + 1/M_R}} \quad (16)$$

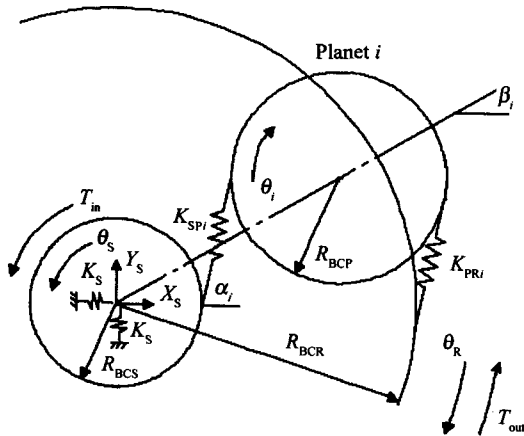


图3 行星齿轮传动的多自由度系统

Fig. 3 Multi-degree of freedom system of the planet gear train

由以上两式可以看出, 阻尼项同刚度项一样, 自始至终都随啮合发生改变。

式(3)~(9)是具有11个自由度、带有周期性变化系数的二阶微分方程组。

#### 4 运动方程的求解及结果分析

系统的运动方程可写成矩阵形式:

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{X}\} + [C] \{\dot{X}\} + \\ [K] \{X\} = \{P\} \end{aligned} \quad (17)$$

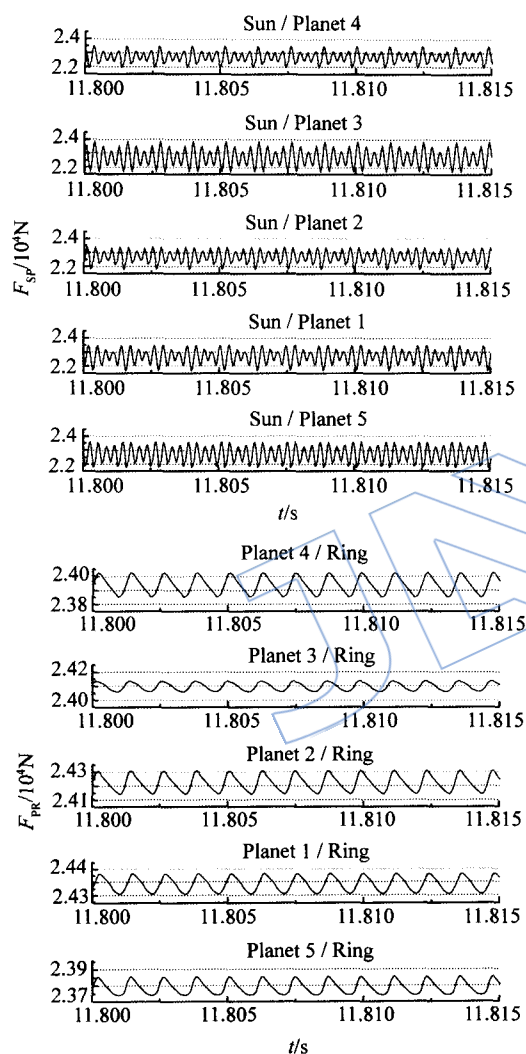


图4 太阳轮中心浮动的行星轮系齿间动载  
(接触比2~3)

Fig. 4 The dynamic loads of gears for the floating motion of the centroid of the sun gear with the contact ratio of 2~3

其解法通常是将原来由  $n$  (这里  $n=11$ ) 个二阶方程组成的二阶方程组转化为由  $2n$  个一阶微

分方程组成的一阶微分方程组, 其初值问题可以表示为:

$$\left. \begin{aligned} y_i' &= f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_{2n}) \\ y_i(t_0) &= y_{i0} \\ (i &= 1, 2, \dots, 2n) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

本文采用 Gill 法(四级四阶的 Runge-Kutta 法)解此微分方程组。由于 Gill 法只能解常系数微分方程组, 而式(17)中的  $[K]$  和  $[C]$  是随时间周期性变化的, 对此先求出各时间积分点上的  $[K]$  和  $[C]$  值, 然后调用 Gill 法求出该时刻的速度和位移, 并将其作为下一时刻的初值, 重复此过程, 即可获得各个时间点上的速度、位移以及相应的动态啮合力。

按上述方法, 采用 FORTRAN 语言编程计算, 求出了接触比分别在 1~2 与 2~3 时系统达到稳定时的齿间动载。图 4 给出了接触比在 2~3 之间、太阳轮中心浮动时的齿间动载, 由图中可以看出, 太阳轮/行星轮齿间动载的变化范围是 21700~23818 N, 行星轮/齿圈齿间动载的变化范围是 23740~24382 N; 接触比在 1~2 时, 齿间动载分布形式与图 4 类似, 此时, 太阳轮/行星轮齿间动载的变化范围是 24017~27377 N, 行星轮/齿圈齿间动载的变化范围是 25981~26795 N。

#### 5 结 论

通过上述分析, 可得如下结论:

(1) 接触比的提高使齿间动载较为显著地降低, 从齿轮的制造上讲, 接触比提高时可以适当减少齿厚以减轻整个轮系的重量。

(2) 太阳轮的浮动改善了动载在各个行星轮上的分布, 使它们趋向于更均匀。

(3) 计算分析表明, 给出一个足够长的积分时间, 可以获得系统的稳定解, 齿间动载在某一定值附近波动。

#### 参考文献:

- [1] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [2] 王建军, 洪涛, 吴仁智, 等. 齿轮系统参数振动问题研究综述[J]. 振动与冲击, 1997, 16(4): 69-73.
- [3] August R. Dynamics of Planetary Gear Trains[R]. N84-26027, 1984.
- [4] 魏大盛. 行星轮系动态特性分析[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2002.