

文章编号: 1000-8055(2005) 01-0001-07

非均匀笛卡尔坐标系网格优化频散 相关保持格式研究

胡 睿, 李晓东

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

摘要: 为克服传统频散相关保持格式(即 DRP 格式)在数值求解非均匀网格问题时由于寄生波的产生而导致的数值不稳定的问题, Cheong & Lee 提出了一种网格优化频散相关保持格式(即 GODRP 格式)。根据其优化思想, 在非均匀笛卡尔坐标系网格条件下, 推导得到了更为通用的 GODRP 格式优化系数公式。针对 Cheong & Lee 文中算例比较不是在同一基准上进行的不足之处, 设计了一个极端恶劣条件下的非均匀笛卡尔网格, 采用 GODRP 格式和 DRP 格式分别求解了二维初始扰动波传播的算例。计算结果表明, 由于 GODRP 格式具有与网格相关的自带粘性, 不用再另外加入人工粘性便可获得精度较高的数值结果, 避免了传统 DRP 格式在给定粘性时人为经验的影响因素。对于非均匀笛卡尔网格, GODRP 格式确实比传统 DRP 格式更加通用, 并可以得到更为准确的数值模拟效果。

关键词: 航空、航天推进系统; 计算气动声学; 数值模拟; 高阶格式; 频散相关保持; 无反射边界条件
中图分类号: O422; V231.3 文献标识码: A

Grid-Optimized Dispersion-Relation-Preserving Schemes for Non-uniform Cartesian Grids

HU Rui, LI Xiao-dong

(School of Jet Propulsion, Beijing University of Aeronautics and Astronautics,
Beijing 100083, China)

Abstract: When the classic Dispersion-Relation-Preserving (DRP) scheme is applied to practical problems using non-uniform grids, spurious numerical oscillations and instabilities will be excited due to the inherent lacking of numerical dissipation. A Grid-Optimized Dispersion-Relation-Preserving (GODRP) scheme for non-uniform grids was proposed by Cheong & Lee to remedy this problem. In this paper, the derivation and formulation of the GODRP scheme were improved for non-uniform Cartesian grids in a more general form. To show the characteristics of the improved GODRP scheme, a 2-D initial pulse problem was solved on an extremely non-uniform Cartesian mesh using both the GODRP scheme and the DRP scheme. Numerical results indicate that because of the inherent numerical dissipation, the GODRP scheme is more feasible to be applied to the aeroacoustic problems using the non-uniform Cartesian grids, and the enhancement of computation accuracy can be expected.

收稿日期: 2004- 01- 06; 修订日期: 2004- 03- 18

联系人: 李晓东

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50076002, 10072009); 航空科学基金资助项目(01C51036, 03A51004)

作者简介: 胡睿(1978-), 女, 湖南株洲人, 北京航空航天大学能源与动力工程学院硕士生, 主要从事计算气动声学研究。

Key words: aerospace propulsion system; computational aeroacoustics; numerical simulation; high order schemes; Dispersion-Relation-Preserving (DRP); non-reflecting boundary conditions

计算气动声学 (Computational Aeroacoustics, CAA) 是近年来在传统计算流体力学 (Computational Fluid Dynamics, CFD) 基础上发展起来的一门新的学科分支。因为大多数气动声学问题不可避免的将涉及到远场声辐射问题, 从声源到计算域边界传播距离很长, 因此在空间导数的处理上, CAA 与一般 CFD 所采用的传统差分格式不同, 大多采用优化的高阶格式, 从而实现低耗散、低频散, 同时每个波长内的网格点数 (即 PPW 数) 更小的目的。因此, 数值差分格式是 CAA 的一个十分重要的研究内容。

由 Tam & Webb^[1] 于 1993 年提出的频散相关保持格式 (Dispersion-Relation-Preserving scheme, DRP 格式) 对空间导数采用七点四阶离散差分, 在波数空间用傅立叶变换和泰勒展开相结合的方法对差分导数进行优化, 使得差分方程与原来的偏微分方程具有相同的离散关系, 从而保证了解的合理性, 因此该格式在计算气动声学中得到了较广泛的应用。

然而, DRP 格式系数的优化过程是基于均匀正交的笛卡尔坐标网格的, 但是在实际应用过程中对于声学问题, 经常是在非均匀笛卡尔网格或非均匀曲线坐标网格条件下进行计算, 此时, 如果仍然采用传统的 DRP 格式, 将会产生数值频散, 导致计算的不稳定, 甚至得不到正确的结果。为了消除由于非均匀网格造成的影响, 通常的做法是在计算过程中加入人工阻尼, 其中 Tam & Shen^[2] 在 1993 年给出的选择性人工粘性 (Artificial Selective Damping) 得到了广泛的应用。但是人工粘性的使用, 将导致计算复杂耗时, 而且使得程序的通用性降低, 所采用的粘性项的大小和分布, 很大程度上依赖于经验的积累。因此, 如何解决由于网格的非均匀性引起的计算的复杂度问题, 成为了 CAA 领域中大家关注的焦点之一。近年来许多研究者为解决该问题进行了大量的工作, 提出了一些改进的格式, 如: Nance, Viswanathan & Sankar^[3] 于 1997 年提出的低频散有限体积格式 (LDFV)、Zhuang & Chen^[4] 于 1998 年提出的优化迎风 DRP 格式 (OUDRP)、Cheong & Lee^[5] 于 2001 年提出的网格优化频散相关保持格式 (GODRP) 等。然而有限体积格式和迎风格式在计

算气动声学的应用中有其局限性^[5]。GODRP 格式采用中心差分的方法, 系数优化过程与当地网格性状相关, 在每个差分点处进行优化, 使得局部有限差分方程与原来的偏微分方程保持相同的离散关系, 从而保证了数值格式在全域的准确性。GODRP 格式这种与网格相关的优化特性克服了传统 DRP 格式在应用于非均匀网格时的不足, 可以适用于更为广泛的计算领域。

但是, 我们注意到, Cheong & Lee^[5] 所采用的算例大多不是在相同的网格情况下用不同的格式计算得到的, 例如对于二维初始扰动波传播的计算算例, 文献[5]给出的比较是 DRP 格式采用均匀正交网格, 而 GODRP 格式采用非均匀网格分别得到的结果。实际上 DRP 格式在加入人工粘性时, 是可以求解非均匀网格情况的, 因此文献[5]并不能有效地说明 GODRP 格式比 DRP 格式更具优势。为此, 本文重新推导了 GODRP 格式在非均匀笛卡尔坐标网格时的系数, 对其优化过程进行了改进, 并且针对一个 CAA 标准问题, 精心设计了一个极端恶劣的非均匀笛卡尔网格, 同时用 GODRP 和 DRP 两种格式进行了计算和比较。结果表明, 对于非均匀笛卡尔网格, 采用 GODRP 格式确实可以得到比传统 DRP 格式更为准确的数值模拟结果。

1 优化系数推导

对于笛卡尔坐标系网格, 由于不涉及物理域与计算域坐标之间的变换问题, 所以可以简化为一维情况进行推导。

与 Cheong & Lee^[5] 不同, 本文采用更为通用的形式来推导 GODRP 格式优化系数。在非均匀笛卡尔坐标系下 (假设差分点为 x_1 , 网格间距为 Δx_j), 对空间一阶偏导数 $\partial f / \partial x$ 采用有限差分展开, 即可得到:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^n a_j f(x + \Delta x_j \cdot \overline{\Delta x}) \quad (1)$$

其中:

$$\overline{\Delta x} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n - 1} \quad (2)$$

$$\Delta x_j = \frac{x_j - x_1}{\Delta x}$$

$(j = 1, 2, \cdots, n - 1, n)$ (3)

对式(1)进行傅利叶变换可得:

$i\alpha \tilde{f} = \left[\frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^n a_j e^{i\alpha \Delta x_j \cdot \Delta x} \right] \tilde{f}$ (4)

比较上式左右两边, 即可得到非均匀网格条件下有限差分格式傅利叶变换的有效(或数值)波数:

$\bar{\alpha} = \frac{i}{\Delta x} \sum_{j=1}^n a_j e^{i\alpha \Delta x_j \cdot \Delta x}$ (5)

很明显, 如果网格空间是不对称的, 对于任意差分模式, 式(5)的有效波数将不是一个实数而是一个复数, 设其实部和虚部分别表示为: $\bar{\alpha}$ 和 $\bar{\alpha}$ 。系数优化过程必须满足使得 $\bar{\alpha} \Delta x - \alpha \Delta x$ 及 $\bar{\alpha} \Delta x$ 在设计的波数范围内尽可能接近 0, 并且保证格式的数值稳定性。以上条件可通过使误差 E 最小来满足:

$E = \int \left| \bar{\alpha} \Delta x - \alpha \Delta x \right|^2 d(\alpha \Delta x) + \lambda \int \left| \bar{\alpha} \Delta x + \exp \left[- \ln 2 \cdot \left(\frac{\alpha \Delta x - \pi}{\sigma} \right)^2 \right] \right|^2 d(\alpha \Delta x)$ (6)

其中, e_r 和 e_i 分别表示实部和虚部的积分上限, λ 表示权系数, σ 表示高斯函数的半波长, c 为一维波方程 $w + cu_x = 0$ 中的波的传播速度。

采用待定系数法, 将泰勒展开和波数空间近似相结合可以得到 n 个点的 GODRP 格式空间离散系数之间的关系。将各个系数用 a_n 和 $a(n-1)$ 表示可得:

$(E_a)_{11} = \int (C_n S) \cdot (C_n S) dk + \lambda \int (C_n C) \cdot (C_n C) dk$

$(E_a)_{12} = \int (C_n S) \cdot (C_{n-1} S) dk + \lambda \int (C_n C) \cdot (C_{n-1} C) dk$

$(E_a)_{21} = \int (C_{n-1} S) \cdot (C_n S) dk + \lambda \int (C_{n-1} C) \cdot (C_n C) dk$

$(E_a)_{22} = \int (C_{n-1} S) \cdot (C_{n-1} S) dk + \lambda \int (C_{n-1} C) \cdot (C_{n-1} C) dk$

$(R)_1 = - \int (C_n S) \cdot (C_1 S - k) dk - \lambda \int (C_n C) \cdot \left\{ C_1 C - \exp \left[- \ln 2 \cdot \left(\frac{k - \pi}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} dk$

$(R)_2 = - \int (C_{n-1} S) \cdot (C_1 S - k) dk - \lambda \int (C_{n-1} C) \cdot \left\{ C_1 C - \exp \left[- \ln 2 \cdot \left(\frac{k - \pi}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} dk$

其中:

$C_f S = \sum_{j=1}^n \Delta C_{f,j} \cdot \sin(k \Delta x_j)$

$C_f C = \sum_{j=1}^n \Delta C_{f,j} \cdot \cos(k \Delta x_j)$

$a_j = \Delta C_{n,j} a_n + \Delta C_{n-1,j} a_{n-1} + \Delta C_{1,j}$ (7)

其中:

$\Delta C_{n,j} = (\Delta X^{-1} C_1)_j$

$\Delta C_{n-1,j} = (\Delta X^{-1} C_{n-1})_j$

$\Delta C_{1,j} = (\Delta X^{-1} C_1)_j$

是与网格相关的参数, 网格矩阵定义如下:

$\Delta X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \Delta_2 & \cdots & \Delta_{n-1} & \Delta_n \\ 0 & \Delta_2^2 & \cdots & \Delta_{n-1}^2 & \Delta_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \Delta^{2n-2} & \cdots & \Delta_{n-1}^{2n-2} & \Delta_n^{2n-2} \end{bmatrix}$

$C_n =$

$[-1, -\Delta_n, -\Delta_n^2, \cdots, -\Delta_n^{2n-2}]^{-1}$

$C_{n-1} =$

$[-1, -\Delta_{n-1}, -\Delta_{n-1}^2, \cdots, -\Delta_{n-1}^{2n-2}]^{-1}$

$C_0 = [0, 1, 0, \cdots, 0]^{-1}$

上式中 Δ_i 的值即为如式(3)所定义 Δx_j , 根据不同差分模式确定上面的矩阵, 即可以得到中心差分及一侧差分 GODRP 格式系数。

为求得使误差 E 达到最小的优化系数, 将式(7)代入式(6), 并令 $\frac{\partial E}{\partial a_n} = 0$ 及 $\frac{\partial E}{\partial a_{n-1}} = 0$, 可以得到如下矩阵形式的代数方程组:

$E_a \cdot \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = R$ (8)

式中矩阵 E_a 及 R 的元素定义如下:

对于给定网格求解方程(8)即得到了与网格相关的GODRP格式系数。该公式比文献[5]更加通用,可用来求解各阶中心及一侧差分GODRP格式系数。当 $n=7$ 时,即可求得七点GODRP格式系数。本文随后的参数分析及算例计算都是采用的7点模式。

2 优化参数对 GODRP 格式的影响

从上述推导过程可以看出,GODRP格式与传统DRP格式的差别在于:在系数的推导过程中,根据各点的非均匀度,加入了与其相关的可抑制不稳定波产生的自带粘性。如何正确掌握加入粘性的大小从而保证格式的低频散低耗散特性,是GODRP格式系数推导过程中的一个重点。下面将讨论不同优化参数对GODRP格式优化系数的影响。图1给出了当 λ 和 σ 固定时, e_r 与 e_i 对数

随着 e_r 与 e_i 的增大,有效波数实部的最大值也会增大,即关键波数 $\bar{\alpha}^{[5]}$ ($|\bar{\alpha}_k \Delta x - \alpha \Delta x| < 0.005$)随

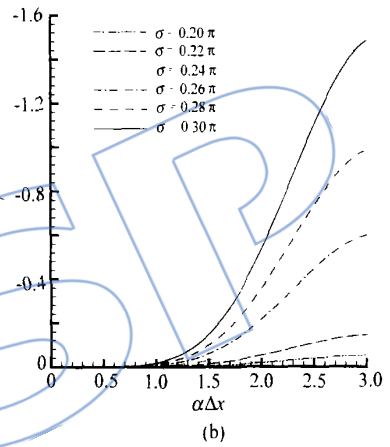
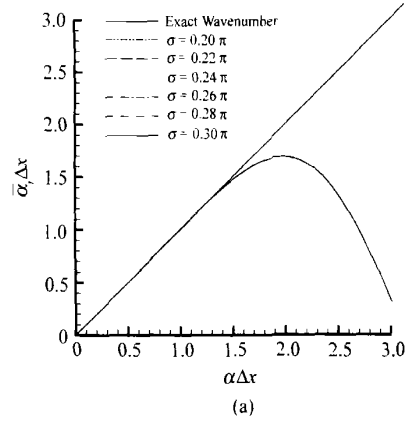


图2 $\lambda=0.2, e_r=e_i=1.4$ 时,数值波数与 σ 的关系

Fig. 2 Numerical wave number versus σ when

$$\lambda=0.2, e_r=e_i=1.4$$

之增大。关键波数与分辨率(PPW 数)的关系为:

$$PPW = \frac{2\pi}{\bar{\alpha}_k \Delta x}$$

因此分辨率随着 e_r 与 e_i 的增大而提高了。当 e 值大于1.4以后,关键波数将随其增大反而减小,因此,最佳优化参数为 $e_r=e_i=1.4$,本文后面的优化系数都是在 $e_r=e_i=1.4$ 的情况下得到的。而从图2(a)中可以看出,几条曲线几乎完全重合,这说明参数 σ 对关键波数几乎没有影响。图1(b)和图2(b)表示了数值波数虚部即数值粘性项的分布。可以看出,粘性项对于长波长的波(即 $\alpha \Delta x$ 较小时)抹削较小,而对于短波长的波(即 $\alpha \Delta x$ 较大时),由于网格的不均匀所造成的数值寄生波抹削较大。这正与我们的要求相符合。随着 e_r, e_i 和 σ 的增大,粘性项增大。 e_r, e_i 确定后,根据实际计算的需要来调节 σ 而得到符合要求的优化系数。本文后面计算用到的 $\sigma=0.1\pi$ 。

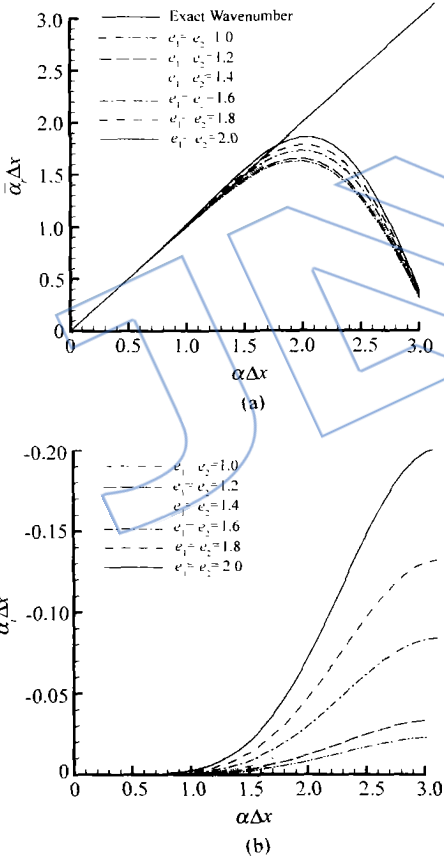


图1 $\lambda=0.2, \sigma=0.2\pi$ 时,数值波数与 e_r, e_i 的关系

Fig. 1 Numerical wave number versus e_r and e_i

when $\lambda=0.2, \sigma=0.2\pi$

值波数的影响,图2表示了 e_r, e_i 和 λ 固定时, σ 对数值波数的影响。图1(a)和图2(a)表示数值波数实部与实际波数的关系。从图1(a)中可以看出

3 数值校验

为了验证非均匀笛卡尔坐标系下 GODRP 格式的有效性, 本文选用第一届计算气动声学专题会议标准问题^[6]第三类问题(二维初始扰动波传播)作为算例。

根据计算需要, 本文设计了一个极端恶劣的跳跃非均匀网格:

$$x(i) = i - 101 + (-1)^i \cdot (-\alpha)$$

$$(i = 1 \sim 233)$$

$$y(i) = i - 101 + (-1)^i \cdot (-\alpha)$$

$$(i = 1 \sim 233)$$

其中, α 反映了网格的非均匀度, 在文献[5]文中取为 0.1, 而本文采用了变化更为剧烈的网格, $\alpha = 0.3$ 。局部计算网格如图 3 所示。

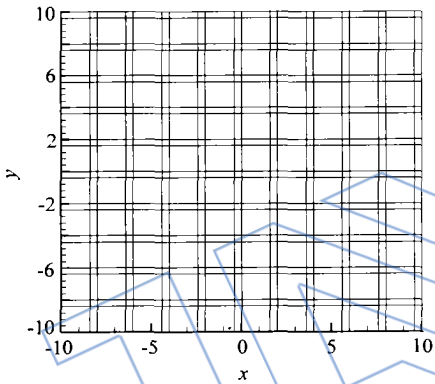


图 3 局部放大计算网格

Fig. 3 Enlarged local grid for computations

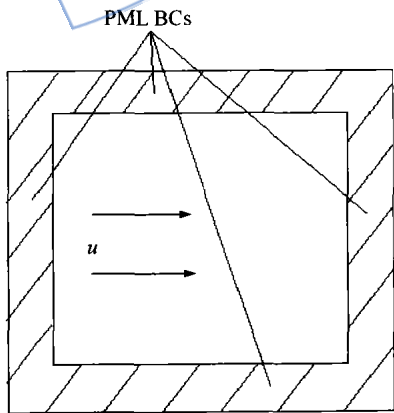


图 4 计算域和边界条件

Fig4. Computational domain and boundary conditions

本文采用的 CAA 计算方法主要基于已有工作^[7, 8]。主控方程为线化欧拉方程, 时间推进采用

Hu 等人提出的 4/6 步低耗散低频散龙格库塔 (Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta, LDDRK) 格式^[9]。远场无反射边界与文献 [7, 8] 中采用的以摄动为基础的远场边界条件不同, 本文采用了极佳匹配层 (Perfectly Matched Layer, PML) 边界条件^[10], 如图 4 所示。所用的吸收边界层宽度为 16 层网格点, 因此, 实际有效内场计算域坐标 x, y 的范围为 $[-100, 100]$ 。

在 $t = 0$ 的初始时刻下, 声波、涡波和熵波扰动为如下形式:

$$p = \exp\left[-(\ln 2) \left(\frac{x^2 + y^2}{9}\right)\right]$$

$$\rho = \exp\left[-(\ln 2) \left(\frac{x^2 + y^2}{9}\right)\right] + 0.1 \exp\left[-(\ln 2) \left(\frac{(x - 67)^2 + y^2}{25}\right)\right]$$

$$u = 0.04y \cdot \exp\left[-(\ln 2) \left(\frac{(x - 67)^2 + y^2}{25}\right)\right]$$

$$v = -0.04(x - 67) \cdot \exp\left[-(\ln 2) \left(\frac{(x - 67)^2 + y^2}{25}\right)\right]$$

在如图 3 所示的跳跃网格中, 网格间距沿 x 和 y 方向同时交替变化, 由网格变化而产生的短波长的寄生波使得计算很不稳定。Cheong & Lee^[5] 在进行比较时, 网格跳跃没有本文剧烈, 而且 DRP 格式的结果是在均匀网格条件下得到的, 不能有效说明 GODRP 格式的优势。而本文在相同的网格条件下用 GODRP 和传统 DRP 格式同时进行了计算。在使用 GODRP 格式计算时, 由于在系数优化过程中已经引入了与网格相关的粘性, 没有再另外加入人工粘性即得到了较好的结果。在使用 DRP 格式计算时, 如果不加入人工粘性, 将由于数值频散而无法获得结果。因此, 本文采用 DRP 格式计算时, 加入了人工选择性粘性。将 DRP 格式计算结果与不加粘性的 GODRP 格式计算结果对比, 如图 5 和图 6 所示。图 5(a) 和 (b) 分别表示了在 $t = 60$ 时刻采用 DRP 格式和 GODRP 格式计算得到的全场的密度波形在接近出流边界处局部等值线图, 从图中明显的可以看出 GODRP 格式的计算结果在没有外加入人工粘性的情况下很稳定, 与解析解吻合得很好, 而 DRP 格式的计算结果, 虽然加入了人工粘性但仍波动。图 6(a) ~ (d) 分别表示了在 $t = 60$ 时刻采用 DRP 格式和 GODRP 格式计算得到的密度扰

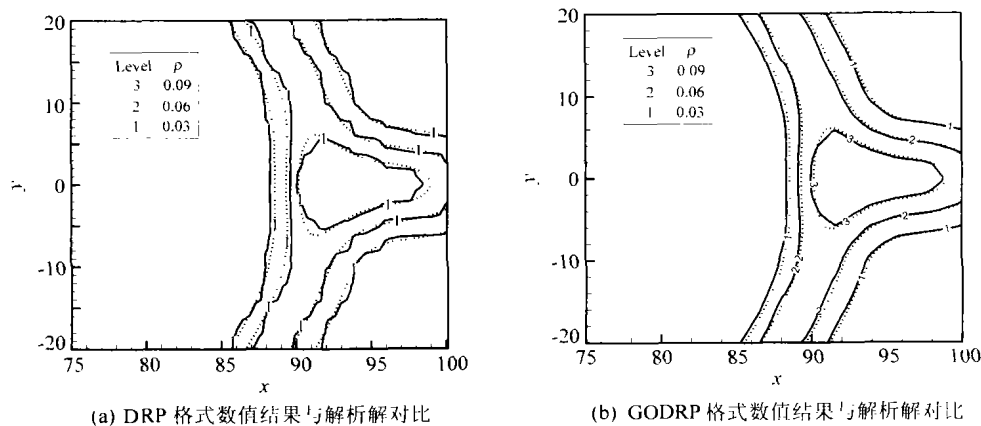


图 5 $t=60$ 时刻密度分布局部等值线图 (··· 解析解; — 数值解)

Fig. 5 Density contours at $t=60$ (··· exact; — numerical results)

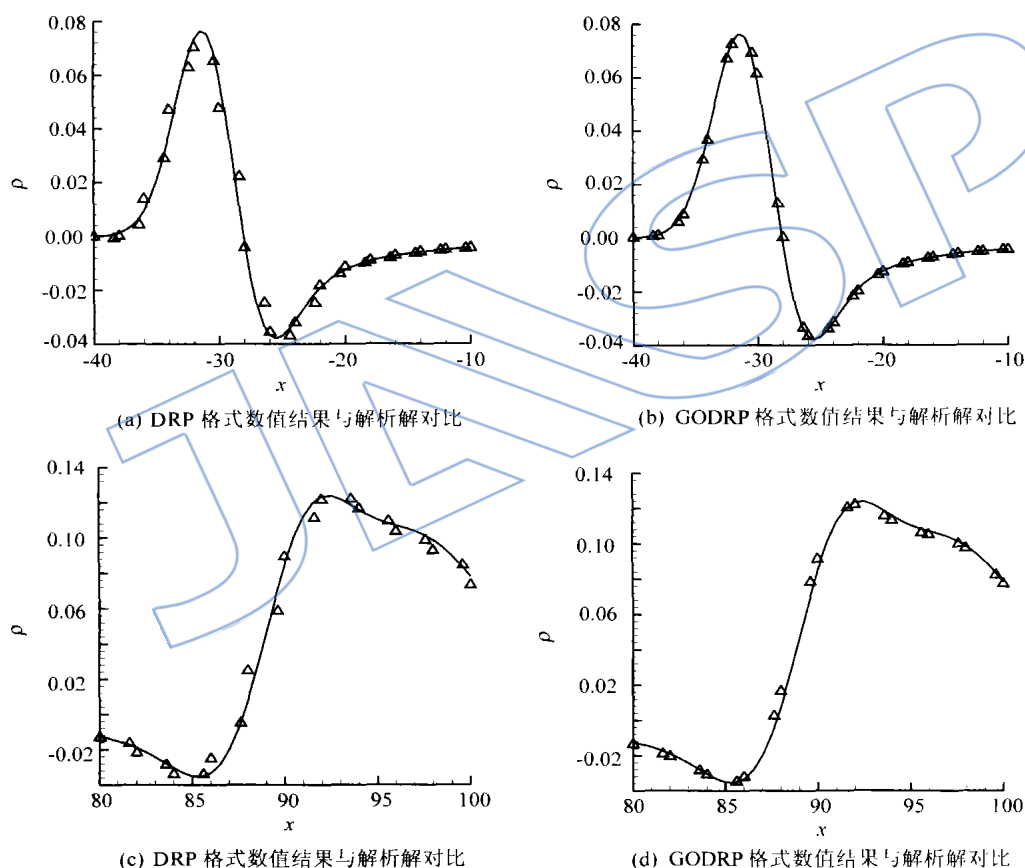


图 6 $t=60$ 时刻 x 轴密度波形局部图 (··· 解析解; $\triangle$ 数值解)

Fig. 6 Density Waveform along the x -axis at $t=60$ (··· exact; $\triangle$ numerical results)

动在 x 轴上的分布。从不同部位的两个局部放大图中可以看出, DRP 格式由于全场加入了人工粘性因此对数值结果有较大的抹消作用, 在波峰处与解析解有较大的偏差, 即使在这种情况下, DRP 格式的计算结果依然没有 GODRP 格式的结果光滑, 而且局部还存在数值抖动, 也就是说其计算过

程没有 GODRP 格式稳定。因此, 从上面的对比及分析可以得出结论: 对非均匀笛卡尔坐标网格, GODRP 格式确实比传统 DRP 格式更具优势。

4 结 论

本文推导并改进了非均匀笛卡尔坐标系网格

情况下 GODRP 格式的优化系数计算公式, 给出了一种更为通用的形式, 并且分析了其中各优化参数对格式的影响作用。然后在一个剧烈变化的非均匀网格情况下, 分别采用 GODRP 格式和 DRP 格式数值模拟了一个二维初始扰动波的传播。计算结果表明, 由于 GODRP 格式自带与网格相关的人工粘性, 不用再另外加入人工粘性便可获得精度较高的数值结果, 避免了传统 DRP 格式在给定粘性时对于人为经验的依赖。从而证实了在非均匀笛卡尔坐标系网格情况下, 采用 GODRP 格式进行数值模拟比传统的 DRP 格式更为方便准确, 显示了 GODRP 格式的优越性。

参考文献:

[1] Tam C K W, Webb J C. Dispersion-Relation-Preserving Schemes for Computational Acoustics [J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, 107: 262~281.

[2] Tam C K W, Shen H. Direct Computation of Nonlinear Acoustic Pulses Using High-Order Finite Difference Schemes[R]. *AIAA Paper* 93- 4325.

[3] Nance D V, Viswanathan K, Sankar L N. Low-Dispersion Finite Volume Scheme for Aeroacoustics Applications[J]. *AIAA Journal*, 1997, 35: 255.

[4] Zhuang M, Chen R F. Optimized Upwind Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Scheme for Computational Aeroacoustics [J]. *AIAA Journal*, 1998, 36: 2146~2148.

[5] Cheong C, Lee S. Grid-Optimized Dispersion-Relation-Preserving Schemes on General Geometries for Computational Aeroacoustics [J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 174: 248~276.

[6] Hardin J C, Ristorcelli J R, Tam C K W. ICASE/LaRC Workshop on Benchmark Problems in Computational Aeroacoustics (CAA)[R]. *NASA CP-* 1995- 3300.

[7] Li X D, Yan J P, Rung T, Thiele F. Numerical Simulation of Duct Inlet Noise[J]. *CFD Journal*, 2000, 9(1): 485- 491.

[8] 李晓东, 高军辉. 二维平行剪切层声波产生和辐射的数值模拟[J]. *航空学报*, 2003, 24(1): 6~9.

LI Xiao-dong, GAO Jun-hui. Numerical Simulation of Sound Generation and Radiation from a 2D Parallel Shear Layer[J]. *ACTA Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2003, 24(1): 6~9.

[9] Hu F Q, Hussaini M Y, Manthey J L. Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics [J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 124: 177~191.

[10] Hu F Q. A Stable, Perfectly Matched Layer for Linearized Euler Equations in Unsplit Physical Variables[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 173: 455~480.