

文章编号: 1000-8055(2004) 03-0289-05

使用 GAO-YONG 方程组 对可压湍流边界层的数值模拟

高 歌, 任 鑫

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

摘要: 应用 SIMPLE/SIMPLER 方法及 QUICK 格式求解 GAO-YONG 可压湍流方程组, 对二维零压力梯度可压平板湍流边界层进行了数值模拟。结果表明, 不需要任何经验系数及壁面函数的 GAO-YONG 可压湍流控制方程组对较广马赫数范围($Ma = 0.2 \sim 2.4$) 平板边界层各项参数(表面摩擦系数 C_f , 对数律, 亏损律等)能做出良好的预测。

关 键 词: 航空、航天推进系统; 湍流; GAO-YONG 理性湍流方程; 可压湍流边界层
中图分类号: O357.5; V211.1 **文献标识码:** A

The Calculation of Wall Boundary Layer Using GAO-YONG Turbulence Equations

GAO Ge, REN Xin

(School of Jet Propulsion, Beijing University of Aeronautics and Astronautics,
Beijing 100083, China)

Abstract: Two-dimensional, stationary, compressible boundary layer with zero pressure gradient is numerically simulated with GAO-YONG turbulence model. Employing staggered grid arrangement, SIMPLE/SIMPLER code and a second-order QUICK scheme are used. All the results verify that the GAO-YONG equations, without using empirical coefficients and wall functions, may successfully simulate the compressible turbulent boundary layer ($Ma = 0.2 \sim 2.4$). The calculation successfully simulates the flow, including the natural transition process, and predicts the fundamental properties of the boundary layer, such as C_f , the logarithmic law, and the defect law, etc, which are finely close to the experimental data. All the results further verify the adaptability of the turbulence model to real turbulent flow.

Key words: aerospace propulsion system; turbulence; GAO-YONG rational model; compressible wall boundary layer

湍流问题不仅是经典物理中留下的最大难题, 而且是流体机械等工程应用中急待解决的问题。计算机和计算方法的发展给这一问题的解决带来了希望。计算机模拟湍流有三种方法: (1) DNS, 即直接求解 Navier-Stokes 方程; (2) Large-

Eddy Simulation, 即求解带亚格子模型的滤波之后的 Navier-Stokes 方程; (3) Reynolds-averaged Navier-Stokes 方程, 即用湍流模型求解 Reynolds 平均方程。在工程应用中人们关心的是湍流的统计平均值, Reynolds 平均方程及其模型自然成为

计算湍流的主要手段。

湍流模型应该能够反映湍流脉动量和平均量的相互作用,能够预测任意的湍流流动。但不幸的是,现在所提出形形色色的湍流模型都不具有通用性。即便对于平板这样的简单流动,也没有模型能够把近壁区和远壁区同时算好。究其原因,湍流边界层中,随着离壁面的距离的变化,粘性切应力和湍流附加切应力各自对流动的影响也发生变化。离开壁面后粘性切应力的影响逐渐减小,而湍流附加切应力的影响开始不断增大,而后逐渐减小。这样在边界层内形成了具有不同流动特征的几个区域^[1]。可分为边界层内层(粘性底层,过渡层,对数律层)和外层(亏损律层)。内层由壁面律描述: $u^+ = f(y^+)$, $u^+ = U/u\tau$, $y^+ = \rho u\tau/\mu$, 外层可用亏损律描述: $(U_{\max} - U)/u\tau = g(y/\delta)$ 。在不同区域上其控制作用的物理过程不同: 粘性底层中粘性切应力起主要作用,流动接近层流状态; 过渡层的粘性切应力和湍流附加切应力为同一量级,流动状态极为复杂; 对数率层流体的湍流附加切应力大于粘性切应力处于完全湍流状态; 外层湍流强度明显减弱,湍流与非湍流瞬息变化,呈现间歇性。总之貌似简单实则极为复杂的平板边界层流动对湍流模型提出了严峻挑战。

GAO-YONG 湍流方程组是基于侧偏平均方法获得的理性湍流方程,其中不含任何经验系数,也不使用壁面函数等经验处理。应用该湍流方程组在 1999 年完成了不可压湍流三个代表性算例的验证^[2~4]: 平板边界层流动、自由剪切流及后台阶流动; 在 2000 年对圆射流进行了模拟^[5], 成功的解决了对于湍流微分方程模型而言的圆射流/平面射流异常现象; 在 2002 年完成了不可压平板边界层自然转捩的模拟和近壁区和远壁区的统一计算^[6], 取得了很好的结果。本文将 GAO-YONG 不可压湍流模式理论推广到可压流动中,并对马赫数分别为 0.2, 0.8, 1.47, 2.4 的湍流平板边界层进行初步研究,以检验 GAO-YONG 可压湍流方程的物理适用性。

1 控制方程

在 GAO-YONG 不可压湍流方程组的基础上,运用 Favre 平均,引入能量方程、状态方程,并对因流体的可压缩性而引起的新的关联项进行模化,从而推导出 GAO-YONG 可压湍流方程组。该方程组由平均流连续方程,动量方程,能量方程,状态方程; 漂移流连续方程,动量方程,机械能方

程组成(平均量省去上标,漂移量有波浪上标):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^T) \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\rho E + p) u_j] = \frac{\partial}{\partial x_j} [(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^T) u_i - q_j - q_j^T] \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \tilde{u}_j) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \tilde{u} u_j) = \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i \tilde{u}_j + \tilde{p} \delta_{ij}) + \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}^T - \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^T) \end{aligned} \quad (5)$$

$$p = \rho R T \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\left(l_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n u_i}{n!} \right] \cdot \tilde{u}_i =$$

$$l_i \left[- \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i \tilde{u}_j + \tilde{p} \delta_{ij}) + \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}^T - \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^T) - \frac{D u_i}{D t} \right] \quad (7)$$

式中 u, p, ρ 分别为平均流的速度、压力、密度; $\tilde{u}, \tilde{p}$ 分别为漂移流的速度、压力。 E 为总能量:

$$E = e + \frac{1}{2} u_i u_i = C_p T - \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u_i u_i \quad (8)$$

$\sigma_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}$ 分别为平均流的层流应力和漂移流的层流应力:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu \tilde{\epsilon}_{ij} - \frac{2}{3} \mu \tilde{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} \\ \tilde{\sigma}_{ij} &= 2\mu \tilde{\epsilon}_{ij} - \frac{2}{3} \mu \tilde{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \\ \tilde{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$\sigma_{ij}^T, \tilde{\sigma}_{ij}^T$ 分别为平均流湍流应力和漂移流湍流应力。模化方法与不可压相同,本文不做详细推导。以平均流湍流应力为例(漂移流湍流应力只需以漂移变形率代替平均流变形率则可得到):

在正交各向异性坐标系(1-2 坐标系,定义

详见文献[2])下:

$$\alpha_{ij}^{(1-2)} = 2\mu_{IJ}\epsilon_{ij}^{(1-2)} - \frac{2}{3}\mu_{LL}\epsilon_{ii}^{(1-2)}\delta_{ij} \quad (11)$$

$$\mu_{IJ} = |\xi_{IJ}| + |\xi_{JI}| \quad \xi_{ij} = \rho l_j \tilde{u}_i \quad (12)$$

其中 I, J, L 为伴随标, 不参与求和约定。由(11), (12)式可以得到正交坐标系下的本构关系:

$$\alpha_{ij}^{(1-2)} = C_{IJ}\epsilon_{ij}^{(1-2)} \quad (13)$$

这样有了正交坐标系下粘性系数矩阵 C_{IJ} 后, 我们便可通过坐标转换矩阵来求出 $x-y$ 坐标系下的粘性系数矩阵 D_{IJ} , 进而得到 $x-y$ 坐标系下的本构关系:

$$\sigma_{ij} = D_{IJ}\epsilon_{ij} \quad (14)$$

q_i, q_i^T 分别为层流热通量和湍流热通量:

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad q_i^T = -k_T \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (15)$$

湍流热通量是模化温度脉动关联项得到的, 本文采用了雷诺比拟^[1]。

$$(T, \mu, k, k_T) = \left(R \frac{p}{\rho}, K T^{0.72}, C_p \frac{\mu}{Pr}, C_p \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \quad (16)$$

$$(T, \mu, k, R, K, C_p, Pr) =$$

(温度, 粘性系数, 热传导系数, 气体常数,

比例常数($\mu_0/T_0^{0.72}$), 等压比热, 普朗特常数)

l 为脉动场的平均漂移位矢, 其模量由(7)式决定, 方向为平均流拉伸主轴方向, 二维情况下由下式决定:

$$\beta = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right) \quad (17)$$

2 计算方法

可压缩流的一个重要特点是密度在流体流动过程中是变化的。因而速度的变化不仅因为压力的变化而致, 也由于密度的变化所造成。这样, 与不可压缩流场计算中的速度-压力耦合关系相对应, 在可压缩流场中是速度-压力-密度三者间的耦合关系。而针对 GAO-YONG 可压湍流方程组, 由于方程中只出现平均密度, 故平均流方程的计算采用了推广到可压缩流计算的 SIMPLER^[7]方法。而漂移流方程仍旧采用原始 SIMPLE^[8]方法。另外平均流方程与漂移流方程都采用了交错网格^[8]技术。

SIMPLER 与 SIMPLE 方法的区别在于: SIMPLER 方法中压力修正方程只是用来修正速度, 而采用动量方程和连续方程推导的压力方程直接求出压力。由于在推导压力方程时没有作任

何的近似假设, 于是用一个正确的速度场来计算假速度, 压力方程将马上给出正确的压力。这样就解决了 SIMPLE 方法求解压力时, 因推导压力修正方程引入近似而导致压力修正量被夸大的影响。对于 GAO-YONG 可压湍流方程组的求解步骤为: (1) 求解漂移流 $\tilde{u}, \tilde{v}$ 速度场, 利用漂移流连续方程修正漂移压力场和速度场; (2) 求解机械能方程, 求出漂移位矢 l , 进而得到湍流粘性系数; (3) 求出压力方程系数, 进而求解压力方程; (4) 将所得压力代入动量方程求解 u, v 速度场, 最后利用平均流连续方程修正平均速度场; (5) 若程序未收敛, 回到(1)再行迭代求解。

本文使用无量纲化方程组, 对马赫数分别为 0.2, 0.8, 1.47, 2.4 的可压湍流边界层进行数值模拟。计算域分别取在长高 $2\text{ m} \times 0.5\text{ m}$, $2\text{ m} \times 0.5\text{ m}$, $5\text{ m} \times 1.25\text{ m}$, $10\text{ m} \times 2.5\text{ m}$ 的矩形区域内, 所取雷诺数 ($Re = (\rho_\infty \times U_\infty \times l_0) / \mu$) 分别为 2.2×10^6 , 6.6×10^6 , 1.1×10^7 , 3.0×10^7 。 ρ_∞ 为来流密度, U_∞ 为来流速度, l_0 为平板长度。边界条件为平板处使用无滑移条件和绝热壁条件, 出口及上边界速度, 压力, 焓值均外推。动量方程中对流项的差分格式使用二阶 QUICK^[7]格式, 扩散项及源项使用具有二阶精度的中心差分, 离散后生成五对角代数方程组, 用交替方向的线迭代的 TD-MA 算法^[7]求解。

3 计算结果

本文在不使用经验系数和壁面函数的情况下, 对二维零压力梯度下可压湍流进行模拟。在计算过程中发现, 入口条件的确定是影响计算稳定性的重要因素。本文采用的方法是: 首先进行层流计算, 使用层流计算的结果, 要求入口的速度型及摩擦系数都要满足 Blasius 解, 然后作为初始值进行湍流计算。图 1 为 $Ma = 0.2, 0.8$ 的速度型和不可压流的线性律和对数律比较, 图 2 为 $Ma = 0.2, 0.8$ 的速度型和不可压流的外层速度型比较。可见当马赫数增大时, 速度型更加饱满。而 $Ma = 0.2$ 和不可压流动时的结果几乎完全重合, 这也是符合物理实际的。由于可压缩性对边界层底层壁面律的影响很小^[9], 所以高马赫数时内层的计算结果仍与不可压流的线性律和对数律比较。图 3 为 $Ma = 1.47$ 的底层速度型同线性律和对数律比较(图中 Re_θ 是边界层动量厚度雷诺数)。图 4 为 $Ma = 1.47$ 的外层速度型与经验值(来自文献[10])的比较。由 4 个不同雷诺数剖面

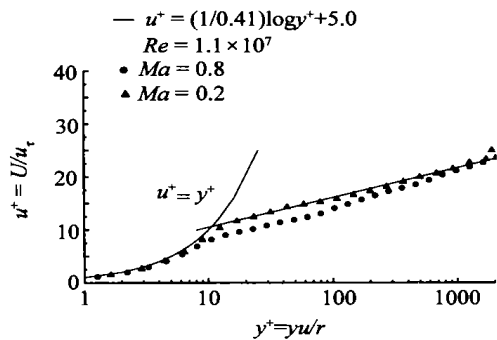


图 1 $Ma=0.2$ 与 $Ma=0.8$ 平板湍流边界层底层速度型

Fig. 1 Logarithmic plot of the velocity profiles for the wall region of flat-plate turbulent boundary layer when $Ma=0.2, 0.8$

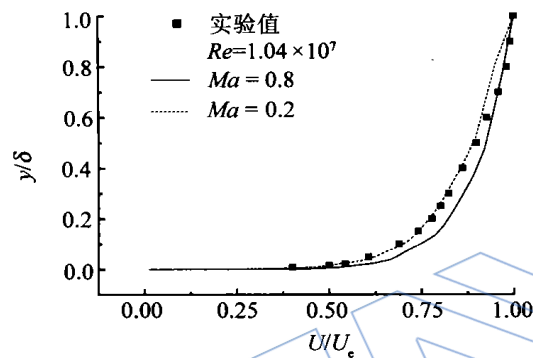


图 2 $Ma=0.2$ 与 $Ma=0.8$ 平板湍流边界层外层速度型

Fig. 2 Prediction of the velocity profiles for the outer region of flat-plate turbulent boundary layer when $Ma=0.2, 0.8$

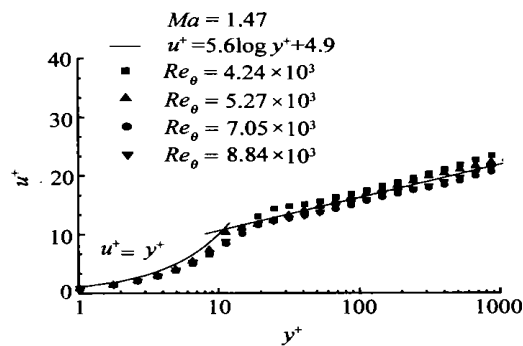


图 3 $Ma=1.47$ 平板湍流边界层底层速度型

Fig. 3 Logarithmic plot of the velocity profiles for the wall region of flat-plate turbulent boundary layer when $Ma=1.47$

度型同线性律和对数律的比较, 文献[9]指出在随着马赫数升高边界层底层速度型相对不可压壁面律将向下偏离, 本文计算结果亦如此。图 6 为 Ma

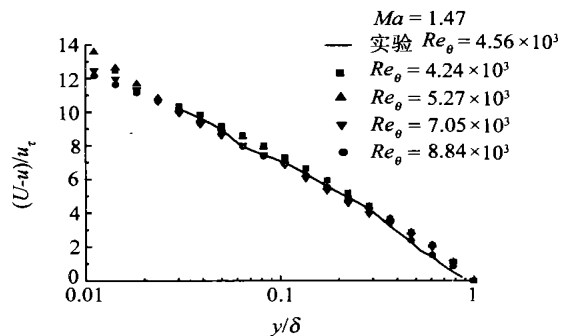


图 4 $Ma=1.47$ 平板湍流边界层外层速度型

Fig. 4 Logarithmic plot of the defect law for the outer region of flat-plate turbulent boundary layer when $Ma=1.47$

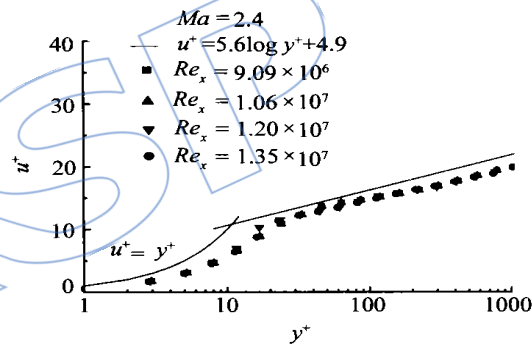


图 5 $Ma=2.4$ 平板湍流边界层底层速度型

Fig. 5 Logarithmic plot of the velocity profiles for the wall region of flat-plate turbulent boundary layer when $Ma=2.4$

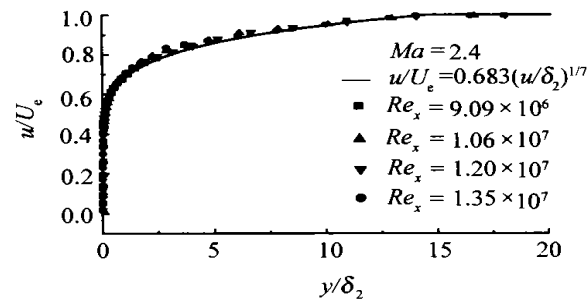


图 6 $Ma=2.4$ 平板湍流边界层外层速度型

Fig. 6 Prediction of the velocity profiles for the outer region of flat-plate turbulent boundary layer when $Ma=2.4$

的比较结果可见, $Ma=1.47$ 时边界层内的速度型分布是令人满意的。图 5 为 $Ma=2.4$ 的底层速

= 2.4 的外层速度型与经验公式(来自文献[9])的比较,结果符合的很好。

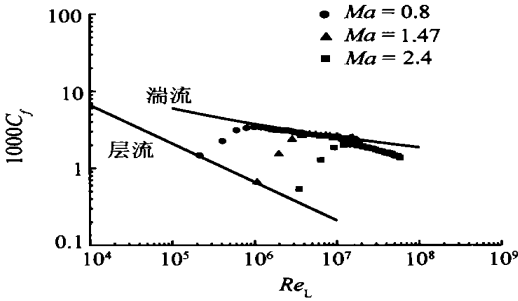


图 7 $Ma=0.8, 1.47, 2.4$ 平板湍流摩擦系数
Fig. 7 Comparison of the friction coefficients for the flat-plate turbulent boundary layer when $Ma=0.8, 1.47, 2.4$

对湍流进行数值模拟,最重要的参数是表面摩擦系数 C_f ,因为它直接关系到流动的阻力,是工程上最关心的内容。图 7 是马赫数为 0.8, 1.47, 2.4 摩擦系数 $C_f(=\tau_w/(0.5\rho U_e^2))$ 沿流向表面变化,与经验估计(层流部分 $C_f=0.664/$

Re_x , 湍流部分 $C_f=0.445/[\ln(0.06Re_x)]^2$) 比较。当马赫数为 0.8, 1.47 时湍流摩擦系数与不可压的数值相近,而马赫数为 2.4 时摩擦系数明显降低。本文计算的摩擦系数的变化趋势同实验分析^[9] 的比较符合的很好。

4 结 论

对零压力梯度下光滑平板的模拟结果表明,GAO-YONG 模型有很强的适应能力,从层流区转捩区到充分发展湍流区对近壁区和远壁区的计算都可以使用统一的模型,而且不需要传统的壁面修正和经验系数。对于充分发展湍流区内的各项参数如对数律、壁面 C_f 、内外层速度型等都能做良好的预测。对于可压缩湍流的初步计算显示

了 GAO-YONG 模型的发展潜力,随着对可压流的深入研究、对物理本质进一步的理解,该模型与物理实际的适定性将得到更好完善,在工程上获得更广泛的应用。

参考文献:

[1] 陈懋章. 粘性流体力学基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.

[2] 高歌, 熊焰. 不可压缩流平均流与拟序流的各向异性模式理论及其数值验证[J]. 航空动力学报, 2000, 15(1): 1- 12. GAO Ge, YAN Yong. The United Modeling Theory for Both of mean Flow and Coherent Flow of Incompressible Turbulence. Journal of Aerospace Power, 2000, 15(1): 1- 12.

[3] 高歌, 熊焰. 不可压缩流控制方程[A]. 中国工程热物理学会第十届年会论文集[C]. No. 012004, 北京: 中国工程热物理学会, 2001: 7- 24.

[4] 高歌, 熊焰. 不可压缩流控制方程[J]. 工程热物理学报, 2002, 23(2): 158- 163.

[5] 李维冰, 高歌. 解决湍流圆/平射流异常现象的数值研究[J]. 航空动力学报, 2001, 16(3): 262- 266. LI Wei-bing, GAO Ge. The Solution of round-Jet/Plane Jet Anomaly Using GAO-YONG Incompressible Turbulence Equations. Journal of Aerospace Power, 2001, 16(3): 262- 266.

[6] 陈广业, 高歌, 尹幸愉. 使用 GAO-YONG 方程组对不可压专转捩/湍流平板边界层的计算[J]. 航空动力学报, 2003, 18(1): 1- 7. CHEN Guang-ye, GAO Ge, YIN Xing-yu. The Calculation of Incompressible Wall Boundary Layer Using GAO-YONG Turbulence Equations. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(1): 1- 7.

[7] 陶文铨. 计算传热学的近代进展[M]. 北京: 科学出版社, 2000.

[8] Patankar S V. Numerical heat transfer and fluid flow[M]. New York: McGraw- Hill, 1980.

[9] Dr. Hermann Schlichting, Boundary- Layer Theory[M]. Seventh Edition. McGraw- Hill, 1979.

[10] George Maise and Henry McDonald, Mixing Length and Kinematic Eddy Viscosity in A Compressible Boundary Layer[J]. AIAA J. 1968, 16(1): 73- 80.