

文章编号: 1000-8055(2004)05-0587-06

发动机连杆的可靠性灵敏度设计

张义民, 王龙山

(吉林大学 南岭校区机械科学与工程学院, 吉林 长春 130025)

摘要: 将可靠性设计理论与灵敏度分析方法相结合, 讨论了发动机连杆的可靠性灵敏度设计问题, 提出了可靠性灵敏度设计的计算方法, 给出了可靠性灵敏度的变化规律, 研究了设计参数的改变对连杆可靠性的影响, 为连杆的可靠性设计提供了理论依据。

关键词: 航空、航天推进系统; 连杆; 可靠性设计; 灵敏度; 任意分布参数

中图分类号: V 232. 1; TH 122

文献标识码: A

Reliability Sensitivity Design of Engine Connecting Rod

ZHANG Yi-min, WANG Long-shan

(College of Mechanical Science and Engineering, Nanling Campus,
Jilin University, Changchun 130025, China)

Abstract: Based on the reliability design theory and sensitivity analysis method, the reliability sensitivity of engine connecting rod is extensively discussed and a numerical method for reliability sensitivity design is presented. The variation rules of reliability sensitivity were obtained and the effects of design parameters on reliability of connecting rod were studied. The method presented in this paper provides the theoretical basis for reliability design of connecting rod.

Key words: aerospace propulsion system; connecting rod; reliability design; sensitivity; arbitrary distribution parameters

建立在概率统计理论基础上的可靠性设计方法^[1~7], 不仅能解决过去用传统设计所不能处理的一些问题, 而且能有效地提高产品质量和降低产品成本, 使机械零部件的预测工作性能与实际工作性能更加符合, 得到既有足够的安全可靠性, 又有适当经济性的优化产品。机械零部件可靠性灵敏度设计, 是在可靠性基础上进行机械零部件的灵敏度设计。事实上, 若某因素对机械零部件失效有较大的影响, 则在设计制造过程中就要严格加以控制, 使其变化较小以保证机械零部件有足

够的安全可靠性; 反之, 如果某因素的变异性对机械零部件可靠性的影响不显著, 则在进行机械零部件可靠性设计时, 就可以把它当作确定量值处理以减少随机变量的数目。目前, 结构可靠性灵敏度计算方法已有了较大的发展^[8~13], 这些方法提供了有效的可靠性灵敏度的计算方法。本文采用摄动方法、可靠性设计方法和灵敏度分析方法讨论了发动机连杆的可靠性灵敏度设计问题。在基本随机变量的概率特性已知的情况下, 可以迅速地得到连杆的可靠性灵敏度设计信息。

收稿日期: 2003- 10- 16; **修订日期:** 2004- 03- 17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50175043); 吉林大学创新基金资助项目

作者简介: 张义民(1958-), 男, 吉林长春人, 吉林大学南岭校区机械科学与工程学院教授, 博士生导师, 力学博士, 机械工程博士后, 主要从事随机结构振动与可靠性、汽车零部件可靠性设计、转子动力学及多体系统动力学等方面的研究

1 连杆的力学模型

经对连杆进行失效分析后,确定连杆的失效模式多为杆部拉伸断裂。工字钢形连杆截面较为常用,连杆的拉伸应力分别为:

$$\sigma = \frac{P}{a(h-2t) + 2bt} \quad (1)$$

式中: P 为拉力的最大值,工字钢形截面尺寸如图

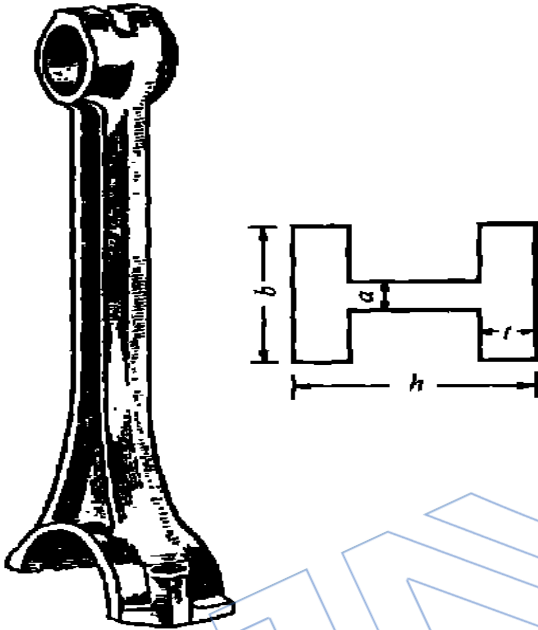


图 1 连杆结构

Fig 1 Structure of connecting rod

1 所示。

根据应力—强度干涉理论,以应力极限状态表示的状态方程为:

$$g(X) = r - \sigma \quad (2)$$

式中, r 为连杆的材料强度,基本随机变量向量 $X = (r \ P \ a \ t \ h \ b)^T$ 。基本随机变量向量 X 的均值 $E(X)$ 、方差 $Var(X)$ 、3 阶矩 $C3(X)$ 、4 阶矩 $C4(X)$ 是已知的,可以认为基本随机变量是相互独立的随机变量,但是无法确定某些基本随机变量向量 X 的分布概型。 $g(X)$ 为状态函数,可表示零部件的两种状态:

$$\left. \begin{aligned} g(X) &\leq 0 && \text{为失效状态} \\ g(X) &> 0 && \text{为安全状态} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

这里极限状态方程 $g(X) = 0$ 是一个六维曲面,称为极限状态面或失效面。

2 可靠性设计的摄动法

把随机参数向量 X 和状态函数 $g(X)$ 表示为:

$$X = X_d + \epsilon X_p \quad (4)$$

$$g(X) = g_d(X) + \epsilon g_p(X) \quad (5)$$

这里 ϵ 为一小参数,下标为 d 的部分表示随机参数中的确定部分,下标为 p 的部分表示随机参数中的随机部分,且具有零均值。显然这里要求随机部分要比确定部分小得多。对上面两式取数学期望,有:

$$E(X) = \bar{X} = E(X_d) + \epsilon E(X_p) = X_d \quad (6)$$

$$\mu_g = E[g(X)] = \bar{g}(X) = E[g_d(X)] + \epsilon E[g_p(X)] = g_d(X) \quad (7)$$

同理,对其取方差,3 阶矩和 4 阶矩,根据 Kronecker 代数^[14]及相应的随机分析理论,有:

$$Var(X) = E\{[X - E(X)]^{[2]}\} = \epsilon^2 E[X_p^{[2]}] \quad (8a)$$

$$C3(X) = E\{[X - E(X)]^{[3]}\} = \epsilon^2 E[X_p^{[3]}] \quad (8b)$$

$$C4(X) = E\{[X - E(X)]^{[4]}\} = \epsilon^2 E[X_p^{[4]}] \quad (8c)$$

$$Var[g(X)] = E\{[g(X) - E(g(X))]^{[2]}\} = \epsilon^2 E[g_p(X)^{[2]}] \quad (9a)$$

$$C3[g(X)] = E\{[g(X) - E(g(X))]^{[3]}\} = \epsilon^2 E[g_p(X)^{[3]}] \quad (9b)$$

$$C4[g(X)] = E\{[g(X) - E(g(X))]^{[4]}\} = \epsilon^2 E[g_p(X)^{[4]}] \quad (9c)$$

式中, $(\cdot)^{[k]} = (\cdot) \otimes (\cdot) \otimes \cdots \otimes (\cdot)$ 为 $(\cdot)$ 的 Kronecker 幂,符号 $\otimes$ 代表 Kronecker 积,定义为:

$$(A)_{p \times q} \otimes (B)_{s \times t} = [a_{ij} B]_{ps \times qt}$$

根据向量值和矩阵值函数的 Taylor 展开式,当随机参数的随机部分比其确定部分小得多时,可以把 $g_p(X)$ 在 $E(X) = X_d$ 附近展开到一阶为止,有:

$$g_p(X) = \frac{\partial g_d(X)}{\partial X^T} X_p \quad (10)$$

矩阵导数定义为:

$$\frac{\partial (A)_{p \times q}}{\partial (B)_{s \times t}} = \left(\frac{\partial A}{\partial b_{ij}} \right)_{ps \times qt}$$

把式(10)代入式(9), 有:

$$\sigma_g^2 = \text{Var}[g(X)] = \epsilon^2 E \left[\left(\frac{\partial g_d(X)}{\partial X^T} \right)^{[2]} X_p^{[2]} \right] = \left(\frac{\partial g_d(X)}{\partial X^T} \right)^{[2]} \text{Var}(X) \quad (11a)$$

$$\theta_g = C3[g(X)] = \epsilon^3 E \left[\left(\frac{\partial g_d(X)}{\partial X^T} \right)^{[3]} X_p^{[3]} \right] = \left(\frac{\partial g_d(X)}{\partial X^T} \right)^{[3]} C3(X) \quad (11b)$$

$$\eta_g = C4[g(X)] = \epsilon^4 E \left[\left(\frac{\partial g_d(X)}{\partial X^T} \right)^{[4]} X_p^{[4]} \right] = \left(\frac{\partial g_d(X)}{\partial X^T} \right)^{[4]} C4(X) \quad (11c)$$

式中: $\text{Var}(X)$, $C3(X)$ 及 $C4(X)$ 为随机参数的方差、3 阶矩和 4 阶矩向量, 无论独立的随机参数还是相关的随机参数, 其数字统计特性均体现在基本随机参数的均值、方差、3 阶矩和 4 阶矩向量 $E(X)$, $\text{Var}(X)$, $C3(X)$, $C4(X)$ 之中。

把状态函数 $g(X)$ 对基本随机变量向量 X 求偏导数, 分别有:

$$\frac{\partial g}{\partial X^T} = \left[\frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial a} \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial h} \frac{\partial g}{\partial b} \right] \quad (12)$$

把式(12)代入式(11), 可以得到状态函数的方差、3 阶矩和 4 阶矩的表达式。

可靠性指标定义为:

$$\beta = \frac{\mu_a}{\sigma_g} = \frac{E[g(X)]}{\sqrt{\text{Var}[g(X)]}} \quad (13)$$

可靠性指标又称为安全指标或可靠性系数, 为无量纲的量, 其物理意义是坐标原点至失效面 $g(X) = 0$ 的最小距离。这样一方面可以利用可靠性指标直接衡量构件的可靠性(通常可靠性指标愈高, 可靠程度愈高), 另一方面在基本随机参数向量 X 服从正态分布时, 可以用失效点处状态表面的切平面近似地模拟极限状态表面, 可以获得可靠度的一阶估计量:

$$R = \Phi(\beta) \quad (14)$$

$$F(y) = \Phi(y) - \mathcal{Q}(y) \cdot \left[\frac{1}{6} \frac{\theta}{\sigma_g^3} H_2(y) + \frac{1}{24} \left(\frac{\eta}{\sigma_g^4} - 3 \right) H_3(y) + \frac{1}{72} \left(\frac{\theta}{\sigma_g^3} \right)^2 H_5(y) + \dots \right] \quad (15)$$

$H_j(y)$ 为 j 阶 Hermite 多项式, 其递推关系为:

$$\left. \begin{aligned} H_{j+1}(y) &= yH_j(y) - jH_{j-1}(y) \\ H_0(y) &= 1, \quad H_1(y) = y \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

据此结构件的可靠度为:

$$R(\beta) = P[g(X) > 0] = 1 - F(-\beta) \quad (17)$$

用上式计算可靠度时, 有时会出现 $R > 1$ 的情况。当 $R > 1$ 时, 采用下述经验公式进行修正^[15]:

$$R^* = R(\beta) - \left\{ \frac{R(\beta) - \Phi(\beta)}{[1 + (R(\beta) - \Phi(\beta))^\beta]} \right\} \quad (18)$$

Edgeworth 级数可以任意精确地逼近随机变量的真实分布, 但通常取级数的前 4 项即可得到较好的近似。在推导过程中, 对随机参数的分布概型和激励类型没有作任何限制, 使之更接近于工程实际。

式中: $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数。

众所周知, 要计算可靠度或失效概率, 需要知道概率密度函数或联合概率密度函数。但是由于缺少足够的试验数据, 很难精确地确定设计参数的分布规律, 并且在有些情况下, 究竟采用何种分布, 却仁者见仁智者见智。即使是近似地指定概率分布, 在大多数情况下也很难进行积分计算而获得可靠度或失效概率, 而数值积分往往是不实用的。在机械结构件的可靠性设计实践中, 只要没有充分的根据说明设计参数的分布是服从何种分布时, 为了安全和简化计算的需要, 通常第一个选择就是假设它为正态分布。对于服从任意分布和无法确定分布概型的情况下, 而有足够的资料来确定设计参数的前 4 阶矩(即均值、方差和协方差、3 阶矩、4 阶矩)时, 作为可供选择的实用方法, 可以采用摄动法求得可靠性指标, 然后应用 4 阶矩技术和 Edgeworth 级数把未知的状态函数的概率分布展开成标准的正态分布的表达式, 进而可以确定了机械结构件的可靠度和可靠性灵敏度。

根据 Edgeworth 级数方法, 可以把服从任意分布的标准化了的随机变量的概率分布函数近似地展开成为标准正态分布函数, 即:

3 可靠性灵敏度

连杆的可靠度对基本随机参数向量 X 均值和方差的灵敏度为:

$$\frac{DR}{DX^T} = \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial X^T} \quad (19)$$

$$\frac{DR}{D \text{Var}(X)} = \left[\frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} + \frac{\partial R(\beta)}{\partial \sigma_g} \right] \frac{\partial \sigma_g}{\partial \text{Var}(X)} \quad (20)$$

式中:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} = & \alpha(-\beta) \left\{ 1 - \beta \cdot \right. \\ & \left[\frac{1}{6} \frac{\theta}{\sigma_g^3} H_2(-\beta) + \frac{1}{24} \left(\frac{\eta}{\sigma_g^4} - 3 \right) H_3(-\beta) + \frac{1}{72} \left(\frac{\theta}{\sigma_g^5} \right)^2 H_5(-\beta) \right] - \\ & \left. \left[\frac{1}{3} \frac{\theta}{\sigma_g^3} H_1(-\beta) + \frac{1}{8} \left(\frac{\eta}{\sigma_g^4} - 3 \right) H_2(-\beta) + \frac{5}{72} \left(\frac{\theta}{\sigma_g^5} \right)^2 H_4(-\beta) \right] \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} = \frac{1}{\sigma_g} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial X^T} = \left[\frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial P} \frac{\partial g}{\partial a} \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial h} \frac{\partial g}{\partial b} \right] \quad (23)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} = - \frac{\mu_g}{\sigma_g^2} \quad (24)$$

$$\frac{\partial R(\beta)}{\partial \sigma_g} = \alpha(-\beta) \left[\frac{1}{2} \frac{\theta}{\sigma_g^3} H_2(-\beta) + \frac{1}{6} \frac{\eta}{\sigma_g^4} H_3(-\beta) + \frac{1}{12} \frac{\theta}{\sigma_g^5} H_5(-\beta) \right] \quad (25)$$

$$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \text{Var}(X)} = \frac{1}{2\sigma_g} \left[\frac{\partial g}{\partial X} \odot \frac{\partial g}{\partial X} \right] \quad (26)$$

把已知条件和可靠性分析的计算结果代入式(19)和式(20), 就可以获得可靠性灵敏度 $\frac{DR}{DX^T}$ 和 $\frac{DR}{D \text{Var}(X)}$ 。

当应用 Edgeworth 级数估算系统的可靠度出现 $R > 1$ 的情况时, 根据计算实践表明, 采用经验修正公式(18)要比使用 Edgeworth 级数所获得的

计算结果更接近于 Monte Carlo 数值模拟结果, 而所得的分布函数曲线也是在 $[0, 1]$ 范围内单调的。可见, 当 $R > 1$ 时, 应用经验修正公式的导数来替换式(19)和式(20)中的 $\frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta}$ 所获得计算的结果更加精确。当有 $R > 1$ 情况出现时, 对可靠性指标 β 的灵敏度为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^*}{\partial \beta} = & \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} + \left[\frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} - \alpha(\beta) \right] \frac{\beta(\beta-1)[R(\beta) - \Phi(\beta)] - 1}{\{1 + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta\}^{\beta+1}} + \\ & \frac{[R(\beta) - \Phi(\beta)](\{1 + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta\} \ln\{1 + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta\} + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta)}{\{1 + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta\}^{\beta+1}} \end{aligned} \quad (27)$$

用上式替换式(19)和式(20)中的 $\frac{DR(\beta)}{D\beta}$, 即获得可靠性灵敏度 $\frac{DR}{D\mu_r}$ 和 $\frac{DR}{D\sigma_r}$ 。

4 数值算例

一般情况下, 在工程实际中构件的几何尺寸

和材料的强度极限是服从正态分布的随机变量, 某种连杆危险截面几何尺寸的均值和标准差为 $(a) = (14, 0.23) \text{ mm}$, $(t) = (27.5, 0.28) \text{ mm}$, $(h) = (140, 0.53) \text{ mm}$, $(b) = (96, 0.47) \text{ mm}$, 作用在连杆上的拉压最大载荷为服从任意分布的随机变量, 其前 4 阶矩为 $(P) = (4.67 \times 10^5 \text{ N}, 3.11 \times$

10^4 N , $3.34 \times 10^{13} \text{ N}^3$, $4.86 \times 10^{18} \text{ N}^4$), 材料强度的均值和标准差为 $(r) = (235, 12.92) \text{ MPa}$, 通常选取不同的材料强度用以解决不同的可靠性问

题, 如疲劳破坏在这里就应该选取疲劳强度。计算得到此连杆的可靠性指标、可靠度和可靠性灵敏度分别为:

$\beta = 11.79886 \quad , \quad R_E > 1.0 \quad , \quad R^* = 1.0 \quad , \quad R_{MCS} = 1.0$

$$\frac{DR}{D \text{ Var}(X)} =$$
$$\begin{bmatrix} R_{\text{Var}(r)} \\ R_{\text{Cov}(r, P)} \\ R_{\text{Cov}(r, a)} \\ R_{\text{Cov}(r, t)} \\ R_{\text{Cov}(r, h)} \\ R_{\text{Cov}(r, b)} \\ R_{\text{Cov}(P, r)} \\ R_{\text{Var}(P)} \\ R_{\text{Cov}(P, a)} \\ R_{\text{Cov}(P, t)} \\ R_{\text{Cov}(P, h)} \\ R_{\text{Cov}(P, b)} \\ R_{\text{Cov}(a, r)} \\ R_{\text{Cov}(a, P)} \\ R_{\text{Var}(a)} \\ R_{\text{Cov}(a, t)} \\ R_{\text{Cov}(a, h)} \\ R_{\text{Cov}(a, b)} \\ R_{\text{Cov}(t, r)} \\ R_{\text{Cov}(t, P)} \\ R_{\text{Cov}(t, a)} \\ R_{\text{Var}(t)} \\ R_{\text{Cov}(t, h)} \\ R_{\text{Cov}(t, b)} \\ R_{\text{Cov}(h, r)} \\ R_{\text{Cov}(h, P)} \\ R_{\text{Cov}(h, a)} \\ R_{\text{Cov}(h, t)} \\ R_{\text{Var}(h)} \\ R_{\text{Cov}(h, b)} \\ R_{\text{Cov}(b, r)} \\ R_{\text{Cov}(b, P)} \\ R_{\text{Cov}(b, a)} \\ R_{\text{Cov}(b, t)} \\ R_{\text{Cov}(b, h)} \\ R_{\text{Var}(b)} \end{bmatrix}$$

$$=$$
$$\begin{bmatrix} -4.271 \times 10^{-31} \\ 6.601 \times 10^{-35} \\ -4.050 \times 10^{-31} \\ -7.813 \times 10^{-31} \\ -6.670 \times 10^{-32} \\ -2.620 \times 10^{-31} \\ 6.601 \times 10^{-35} \\ -1.020 \times 10^{-38} \\ 6.259 \times 10^{-35} \\ 1.208 \times 10^{-34} \\ 1.031 \times 10^{-35} \\ 4.050 \times 10^{-35} \\ -4.050 \times 10^{-31} \\ 6.259 \times 10^{-35} \\ -3.840 \times 10^{-31} \\ -7.409 \times 10^{-31} \\ -6.325 \times 10^{-32} \\ -2.485 \times 10^{-31} \\ -7.813 \times 10^{-31} \\ 1.208 \times 10^{-34} \\ -7.409 \times 10^{-31} \\ -1.430 \times 10^{-30} \\ -1.220 \times 10^{-31} \\ -4.794 \times 10^{-31} \\ -6.670 \times 10^{-32} \\ 1.031 \times 10^{-35} \\ -6.325 \times 10^{-32} \\ -1.220 \times 10^{-31} \\ -1.042 \times 10^{-32} \\ -4.093 \times 10^{-32} \\ -2.620 \times 10^{-31} \\ 4.050 \times 10^{-35} \\ -2.485 \times 10^{-31} \\ -4.794 \times 10^{-31} \\ -4.093 \times 10^{-32} \\ -1.608 \times 10^{-31} \end{bmatrix}$$

$$\frac{DR}{DX} = \left[\frac{\partial g}{\partial \bar{r}} \frac{\partial g}{\partial \bar{P}} \frac{\partial g}{\partial \bar{a}} \frac{\partial g}{\partial \bar{t}} \frac{\partial g}{\partial \bar{h}} \frac{\partial g}{\partial \bar{b}} \right] = \begin{bmatrix} 1.703 \times 10^{-32} \\ -2.633 \times 10^{36} \\ 1.615 \times 10^{-32} \\ 3.116 \times 10^{-32} \\ 2.660 \times 10^{-33} \\ 1.045 \times 10^{-32} \end{bmatrix}^T$$

这里 R_E 为使用 Edgeworth 级数计算的可靠度, R^* 为采用 Edgeworth 级数的经验修正公式计算的可靠度, R_{MCS} 为应用 Monte Carlo 数值技术模拟的可靠度。

从灵敏度矩阵 $\frac{DR}{DX^T}$ 可以看出, 连杆的材料强度 r 和截面几何尺寸的均值增加, 其结果将使连杆趋于更加可靠, 而连杆承受的载荷 P 的均值增加, 其结果将使连杆趋于更加不可靠(失效), 其变化率最大的为连杆的几何尺寸, 最小的为载荷, 也就是说, 使连杆趋向可靠(或失效)的速度为几何尺寸比材料强度的大, 材料强度比载荷的大。从灵敏度矩阵 $\frac{DR}{DVar(X)}$ 可以看出, 基本随机参数方差的增加, 都会使连杆趋于更加不可靠(失效), 但基本随机参数的协方差的变化对连杆的可靠与否的影响却不尽相同。数值计算结果可为工程设计人员精确设计连杆提供定量的依据。而上面的计算结果与通常的定性分析结果完全一致, 这进一步说明了灵敏度矩阵对连杆各因素分析的全面性和正确性。从前面的连杆分析可得到如下结论: 在连杆的设计、制造、使用和评估中, 要严格控制敏感参数的变化。

5 结 论

在连杆可靠性研究的基础上, 提出一种计算连杆可靠性灵敏度的数值方法, 有效地反映了连杆各因素对其失效的影响程度。本数值方法在随机参数前 4 阶矩已知的情况下, 放松了对随机参数的分布概型的限制, 使之更接近于工程实际中的连杆的可靠性问题, 为分析和修改连杆的可靠性水平提供了理论依据。可见本文方法是对机械行业产品进行可靠性灵敏度设计的通用的、实用的和有效的方法。

参考文献

[1] 孔瑞莲, 洪其麟, 宋兆泓, 等. 航空发动机可靠性工程[M].

北京: 航空工业出版社, 1996

[2] 张义民. 汽车零部件可靠性设计[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2000

[3] Zhang Y M, Chen S H, Liu Q L, Liu T Q. Stochastic Perturbation Finite Elements[J]. *Computers & Structures*, 1996, 59(3): 425- 429

[4] Zhang Y M, Wen B C, Chen S H. PFEM Formalism in Kronecker Notation[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 1996, 1(4): 445- 461

[5] Zhang Y M, Liu Q L, Wen B C. Quasi-Failure Analysis on Resonant Demolition of Random Structural Systems[J]. *AIAA Journal*, 2002, 40(3): 585- 586

[6] Zhang Y M, Liu Q L. Reliability-Based Design of Automobile Components[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part D, Journal of Automobile Engineering*, 2002, 216(D6): 455- 471

[7] 张义民, 王顺, 刘巧伶, 等. 具有相关失效模式的多自由度非线性随机结构振动系统的可靠性分析[J]. *中国科学(E辑)*, 2003, 33(9): 804- 812

[8] Madsen H O, Krenk S, Lind N C. Methods of Structural Safety[M]. *Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.*, 1986

[9] Hohenbichler M, Rackwitz R. Sensitivity and Importance Measures in Structural Reliability[J]. *Civil Engineering Systems*, 1986, 3(4): 203- 209

[10] Bjerager P, Krenk S. Parametric Sensitivity in First Order Reliability Analysis[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1989, 115(7): 1577- 1582

[11] 张义民, 刘巧伶, 闻邦椿. 单自由度非线性随机参数振动系统的可靠性灵敏度分析[J]. *固体力学学报*, 2003, 24(1): 61- 67

[12] 张义民, 刘巧伶, 闻邦椿. 非线性随机系统的独立失效模式可靠性灵敏度[J]. *力学学报*, 2003, 35(1): 117- 120

[13] 张义民. 机械零件的可靠性分析的参数灵敏度分析[J]. *机械强度*, 2003, 25(4): 237- 240

[14] Vetter W J. Matrix Calculus Operations and Taylor Expansions[J]. *SIAM Review*, 1973, 15: 352- 369

[15] Zhang Y M, Wen B C, Liu Q L. First Passage of Uncertain Single Degree-of-Freedom Nonlinear Oscillators[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 165(4): 223- 231