

文章编号: 1000-8055(2004)05-0604-06

油叶型轴承—不平衡转子系统的 非线性动力学分析

沈光琰, 肖忠会, 郑铁生, 张 文
(复旦大学 力学与工程科学系, 上海 200433)

摘要: 基于变分法提出了一个求解雷诺边界条件下有限长轴承油膜力的快速算法, 用此算法对一个三油叶不平衡轴承—转子系统的非线性动力学行为进行了一系列的分析。数值模拟的结果显示了转子由稳定的同步涡动分岔为半频油膜涡动继而变为油膜振荡的失稳过程, 还分析了轴承形状、轴承间隙、转子的质量大小、质量偏心位置等参数对转子运动的影响, 提出了如何通过调节这些参数来提高转子系统稳定性的方法。

关 键 词: 航空、航天推进系统; 油叶轴承; 变分法; 非线性; 雷诺边界; 失稳转速

中图分类号: V 232. 96; O 322

文献标识码: A

Nonlinear Dynamic Behaviors of an Imbalance Rotor on Multi-Lobe Bearings

SHEN Guang-yan, XIAO Zhong-hui,
ZHENG Tie-sheng, ZHANG Wen

(Department of Mechanics and Engineering Science,
Fudan University Shanghai 200433, China)

Abstract: Based on the free boundary theory and the variational method, a fast and accurate model for the calculation of the fluid-film forces under the Reynolds boundary condition is presented. The model has been applied to the nonlinear dynamic behavior analysis of an imbalanced rigid rotor with two three-lobe bearing supports. Numerical simulation shows that the imbalanced rotor undergoes a bifurcation from synchronous motion to double period motion and at last loses its stability as chaotic motion. This paper also studied the influences of the rotor mass and the mass eccentricity. It is found that the threshold speed at which the rotor will lose stability decreases with the increase of rotor mass. The eccentricity influences the motion of the rotor seriously. The rotor threshold speed increases rapidly with the increase of mass eccentricity. Study of the elliptical bearing shows that the threshold speed of rotor supported by three-lobe bearings is higher than that of the elliptical bearings.

Key words: aerospace propulsion system; multi-lobe bearing; variational method;
nonlinear; Reynolds boundary condition; critical speed

收稿日期: 2003- 10- 31; **修订日期:** 2004- 04- 23

基金项目: 国家自然科学基金重大资助项目(19990510); 国家重点基础研究专项经费基金资助项目(G1998020316)

作者简介: 沈光琰(1979-), 男, 江苏盐城人, 复旦大学力学与工程科学系硕士生, 主要从事转子动力学研究

传统的轴承—转子系统的动力学分析都是借助于线性化的描述, 基于小扰动的假设将非线性系统简化为一个用八个刚度, 阻尼系数表征的线性模型^[1]。然而在很多情况下, 转子不再仅仅局限在平衡位置的附近做小扰动, 此时的轴承—转子系统的动力学行为会表现出很强的非线性, 只有借助于分析原始的非线性动力方程, 才能更彻底更清晰地了解系统的运动特性。对转子动力学行为进行非线性分析的一个主要障碍就是如何快速而准确的计算瞬态油膜力, 最精确但同时也是最耗时的方法是以有限元法^[2]和有限差分法^[3]为代表的数值方法。这些方法虽然能够比较准确的求出油膜力, 但其计算量十分巨大, 难以实际运用于非线性分析中。因此在进行非线性分析时, 常用短轴承理论^[4]或长轴承理论^[5]来简化油膜力的计算。根据文献^[6]只有当轴承的长径比小于 0.2 时才能采用短轴承假设, 当长径比大于 2.5 时才能用长轴承假设, 并且在实际情况下, 轴承一般由几块轴瓦(油叶)构成, 边界条件的复杂性使得难以运用短轴承或长轴承理论求出解析结果。根据精确和快速的原则, 基于变分法提出了一个雷诺边界条件下油叶轴承油膜力的快速算法, 作为应用对油叶型轴承—转子系统的非线性动力学行为进行了一系列分析, 展示了不平衡转子系统的失稳过程, 并研究了轴承形状、轴承间隙、转子的质量大小、质量偏心位置等参数对转子稳定性的影响。

1 油膜力的计算

如图 1 所示, O_b-uvw 为局部笛卡儿坐标系, 其中: $J(q) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} h^3 \left[\left(\frac{\partial q}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial \zeta} \right)^2 \right] d\theta d\zeta - \iint_{\Omega} f \cdot q d\theta d\zeta$ $h = 1 - u \cos \theta - v \sin \theta$ $f = (-u + 2\dot{v}) \sin \theta + (v + 2\dot{u}) \cos \theta$ $K = \{q \in C^1(\Omega) \mid q \geq 0 \text{ in } \Omega, \text{ and } q = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ $u, v, \dot{u}$ 及 $\dot{v}$ 分别为局部坐标系下的轴颈中心的无量纲位移和速度(量纲比为 C 和 $C\omega$, C 为间隙, ω 为轴颈自转角速度), h 是油膜厚度, f 是载荷函数。 K 为 Sobolev 空间上的一个非负函数闭凸子集。注意到自由边界 Γ 近乎为直线, 其附近的压强也非常接近于零, 所以设压力分布的实验函数可以分离变量为:

$q(\theta, \zeta) = g(\zeta)r(\theta)$ (5)

代入(1)得:

O_b-xyz 为原点在轴承中心的固定坐标系, Ω 为单片油叶在柱坐标中的展开。 $\Omega = [0, \gamma] \times [-\lambda, \lambda]$, γ 为油叶的包角, $\lambda = L/d$ 为长径比, $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^0$, Ω^+ 为正压区, Ω^0 为零压区, Γ 为两者的边界(待定边界)。计算油膜力首先要计算出单片油叶上的压力分布函数 p , 根据变分原理, 求解雷诺边界条件下的压力分布 p 等价于求解如下的泛函极值问题^[7]:

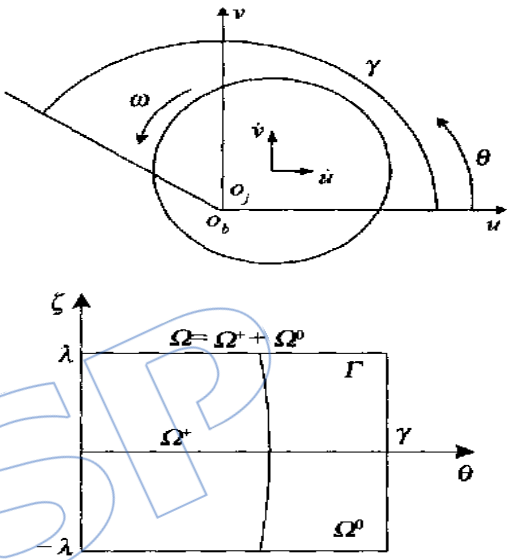


图 1 局部坐标系中单片油叶及其展开
Fig 1 Cross section of journal and one pad of bearing in the local reference frame

求: p 满足

$J(p) = \min_{q \in K} J(q)$ (1)

其中: $J(q) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} h^3 \left[\left(\frac{\partial q}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial \zeta} \right)^2 \right] d\theta d\zeta - \iint_{\Omega} f \cdot q d\theta d\zeta$ (2)

$h = 1 - u \cos \theta - v \sin \theta$ $f = (-u + 2\dot{v}) \sin \theta + (v + 2\dot{u}) \cos \theta$ (3)

$K = \{q \in C^1(\Omega) \mid q \geq 0 \text{ in } \Omega, \text{ and } q = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ (4)

$J(q) = \frac{1}{2} (c_1 d_1 + c_2 d_2) - c_3 d_3$ (6)

其中:

$c_1 = \int_{\lambda} g^2(\zeta) d\zeta$ $c_2 = \int_{\lambda} g'^2(\zeta) d\zeta$ $c_3 = \int_{\lambda} g(\zeta) d\zeta$ (7)

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \int_0^{\delta} h^3(\theta) r^2(\theta) d\theta \\ d_2 &= \int_0^{\delta} h^3(\theta) r^2(\theta) d\theta \\ d_3 &= \int_0^{\delta} h^3(\theta) r(\theta) d\theta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由于 d_1, d_2, d_3 仅由函数 $r(\theta)$ 决定, 所以如果当我们假定 $r(\theta)$ 已知, 就可以将 d_1, d_2, d_3 当做已知常数。此时求解极值问题变为求解如下的 Euler-Lagrange 方程:

$$\left. \begin{aligned} d_2 g'(\zeta) - d_1 g(\zeta) &= -d_3 \\ g(-\lambda) &= g(\lambda) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

方程(9)的解是:

$$g(\zeta) = b[\cosh(k\lambda) - \cosh(k\zeta)] \quad (10)$$

其中:

$$k = \sqrt{\frac{d_1}{d_2}} \quad (11)$$

不失一般性, 令 $br(\theta)$ 为 $r(\theta)$, 于是:

$$g(\zeta) = \cosh(k\lambda) - \cosh(k\zeta) \quad (12)$$

代入(7)求得:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 2\lambda + \lambda \cosh(2k\lambda) - \frac{3}{2k} \sinh(2k\lambda) \\ c_2 &= \frac{k}{2} [\sinh(2k\lambda) - 2k\lambda] \\ c_3 &= \frac{2}{k} [k\lambda \cosh(k\lambda) - \sinh(k\lambda)] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

首先给出 k 的一个初值, 计算出 c_1, c_2, c_3 的值, 就把二维的极值问题转换成一维问题:

求解函数 $r(\theta)$ 满足:

$$\left. \begin{aligned} r(\theta) &\in \{c^1[0, \gamma] | r(\theta) \geq 0 \text{ in } (0, \gamma), \\ &\text{and } r(0) = r(\gamma) = 0 \} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

使得下式取得极小值:

$$\begin{aligned} J(r) &= \frac{1}{2} \int_0^{\delta} h^3(\theta) [c_1 r^2(\theta) + c_2 r^2(\theta)] d\theta - \\ &\quad c_3 \int_0^{\delta} f(\theta) r(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (15)$$

当求得 $r(\theta)$ 后, 再利用方程(11)来迭代修正 k_0

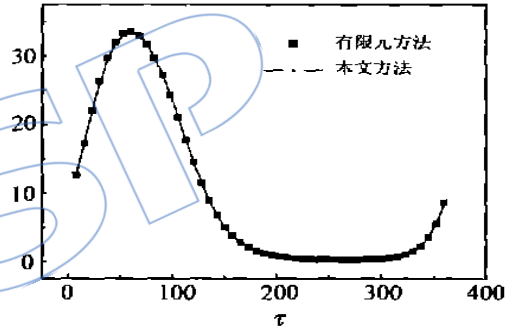
下面我们来求 $r(\theta)$: 首先引入油膜的破裂边界 $0 < \delta < \gamma$ 将 θ 归一化, 得到新的自变量 η $0 \leq \eta = \frac{\theta}{\delta} \leq 1$ 然后用 Lagrange 多项式来表示 $r(\theta)$:

$$r(\eta) = \begin{cases} r(\eta) = w(\eta) \cdot l^T(\eta) a & \text{当 } 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (16)$$

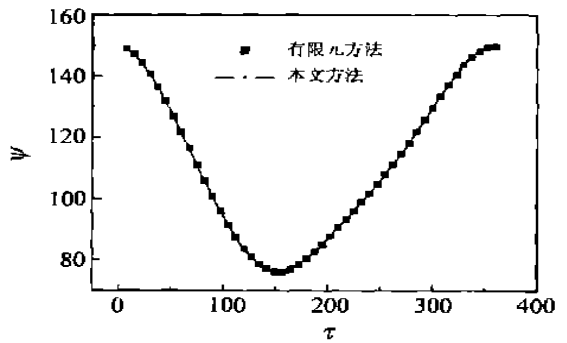
$$\left. \begin{aligned} a &= \{a_i\}_{i=1, n}^T \\ l(\eta) &= \{l_i(\eta)\}_{i=1, n}^T \\ l_i(\eta) &= \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\eta_j - \eta}{\eta_j - \eta_i} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中: $\eta = (i-1)/(n-1)$, $(i=1, \cdots, n)$ 是插值函数的基点, $l_i(\eta)$, $(i=1, \cdots, n)$ 是 Lagrange 多项式的基函数。我们根据短轴承油膜力表达式以及雷诺边界条件的要求, 取权函数 $w(\eta)$ 为:

$$w(\eta) = h^{-2}(\delta\eta) \sin(\pi\eta) \quad (18)$$



(a) 油膜力幅值



(b) 油膜力相位

图 2 单片瓦油膜力幅值与相位与充零算法比较

Fig 2 Comparison of the fluid-film force between two methods

这样使得即使插值函数只取很少的几个基点, 也能得到相当高的精度。在本文算例中, 只取了三个基点($n=3$), 其精度已接近于有限元方法(图 2)。因为 $w(\eta) \geq 0$ 并且 $r(\eta) = a_j w(\eta)$, 所以当 $a \geq 0$ 时, 就表示解是非负的, 而且当 $a_n = 0$ 时, $r(\delta) = r'(\delta) = 0$ 满足雷诺边界条件的要求。把表达式(16)代入(8)得到:

$$d_1 = a^T K_1 a \quad , \quad d_2 = a^T K_2 a \quad , \quad d_3 = a^T [(v + 2\dot{u})b_1 + (-u + 2\dot{v})b_2] \tag{19}$$

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{\delta} \int h^3 [w(\eta)l(\eta) + w(\eta)l(\eta)][w(\eta)l(\eta) + w(\eta)l(\eta)]^T d\eta \\ K_2 &= \delta \int h^3 w^2(\eta)l(\eta)l^T(\eta) d\eta \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

且式(15)变为:

$$J(r) = \frac{1}{2} a^T K a - a^T b \tag{21}$$

$$K = c_1 K_1 + c_2 K_2 \quad , \quad b = c_3 [(v + 2\dot{u})b_1 + (-u + 2\dot{v})b_2] \tag{22}$$

$$b_1 = \delta \int \cos \frac{\eta}{\delta} w(\eta)l(\eta) d\eta \quad , \quad b_2 = \delta \int \sin \frac{\eta}{\delta} w(\eta)l(\eta) d\eta \tag{23}$$

显然式(21)要取得最小值, 需要满足下式:

$$a = K^{-1}b \tag{24}$$

先设初值 $\delta = \gamma$, 如果(24)的解满足 $a \geq 0$, 那就表示没有出现油膜破裂, 可以直接得到 $r(\theta)$ 。如果 $a_n < 0$, 表示出现了油膜破裂, 需要减少 δ 的值, 重新计算 a 直到 $a_n = 0$ 。求得压力分布后在单片油叶上积分得到局部坐标系下的单片油叶油膜力(25), 转换到整体坐标系后累加所有油叶, 就得到轴承的油膜力 f_x, f_y (26), 其中 k 表示第 k 块轴瓦, T_k 为第 k 块油瓦的局部坐标系与整体坐标系间的转换矩阵。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_u \\ f_v \end{Bmatrix} &= - \int_{\lambda} g(\zeta) d\zeta \int_0^{2\pi} r(\theta) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta \\ &= - c_3 \begin{Bmatrix} b_1^T a \\ b_2^T a \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \sum_k T_k \begin{Bmatrix} f_u^{(k)} \\ f_v^{(k)} \end{Bmatrix} \tag{26}$$

2 动力学方程

考虑对称刚性 Jeffcott 转子-轴承系统, 转子的质量为 2, 则轴心的运动方程为:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\kappa}{\sigma} f_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \rho \cos \tau \\ \ddot{y} &= \frac{\kappa}{\sigma} f_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \rho \left[\sin \tau - \frac{1}{\sigma^2} \right] \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

其中: 无量纲转速 $\sigma = \omega \sqrt{e/g}$, 无量纲偏心率 $\rho = e/C$, 参数 $\kappa = 6\mu R^4/mC^3 \cdot \sqrt{e/g}$, $\tau = \omega t$, e 为质量偏心, μ 为润滑油的粘性系数, R 为轴颈半径。 $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ 为轴颈的无量纲位移和速度。

3 算例及分析

算例中所用三油叶轴承轴瓦的包角为 $3 \times$

100° , 椭圆轴承为 $2 \times 150^\circ$; 其他参数为: $R = 0.1$ m, $\mu = 0.02$ Pa $\cdot$ s, $C/R = 0.003$, $\lambda = 1.0$, 并取轴承预负荷为 0.1。本文使用了 4 阶龙格-库塔积分法来求轴颈的瞬态响应以及绘制轨迹图, 分岔图, Poincare 截面等

3.1 油膜力结果与有限元法比较

作为比较, 我们同时用有限元充零算法和本提出的方法计算了局部坐标系下椭圆轴承单片瓦(包角 100°)的油膜力, 图 2 显示了当 $u = \epsilon \cos \tau$, $v = \epsilon \sin \tau$ 时的油膜力的幅值和相位变化情况, 其中 $\epsilon = 0.8$, $\epsilon = 0$, 可以看出即使在大扰动($\epsilon = 0.8$)

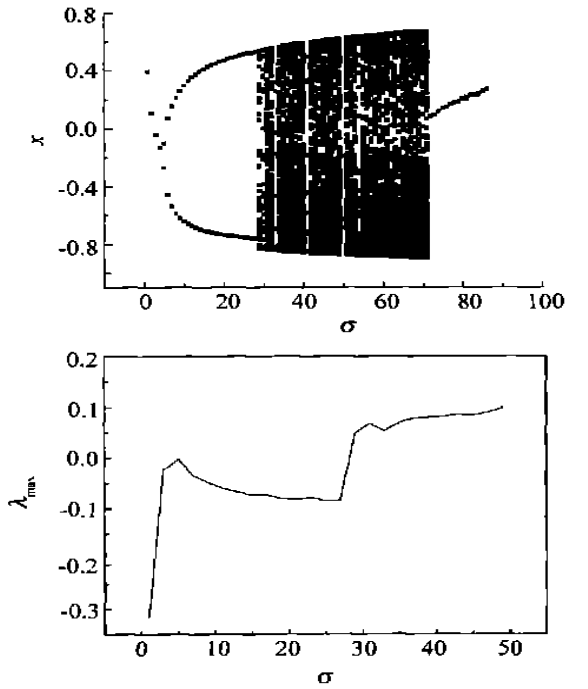


图 3 分岔图和最大 Lyapunov 指数图
($\rho = 0.3, \kappa = 6.73$)

Fig 3 Bifurcation diagram and the figure of max Lyapunov exponent

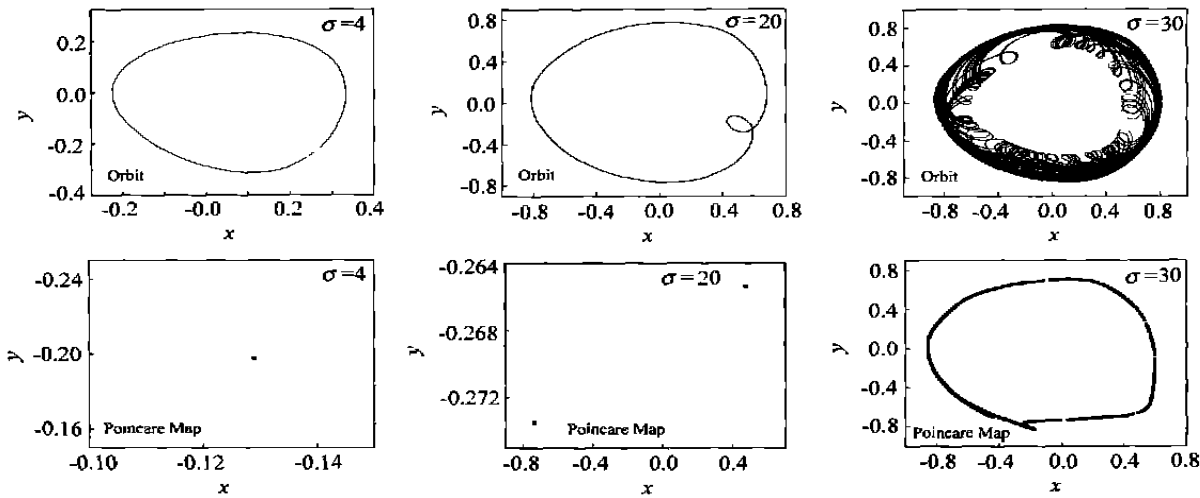


图 4 不同转速下的相图和 Poincaré 截面图 ($\rho=0.3, \kappa=6.73$)

Fig 4 Orbit and the Projected Poincaré Map

的情况下, 两种方法的计算结果也非常接近, 因此用本文提出的方法对转子进行动力学行为分析的精度是有保证的。

3.2 分岔

图 3 是在 $m=200, \rho=0.3, \kappa=6.73$ 情况下绘制的三油叶轴承-转子系统的水平方向位移对转速的分岔图和最大 Lyapunov 指数值图^[8], 图 4 为转子在不同转速下的轨迹图和 T 周期 Poincaré 映射图。当 $\sigma < 5$ 时, 轴心的运动是周期 T 的同步涡动, Poincaré 映射图上只有一个孤立点, 最大 Lyapunov 的指数值小于零; 在 $\sigma=5$ 这点发生了倍周期分岔, 最大 Lyapunov 指数有一个从负值向零发展再返回的过程, 轴心的运动频率变为转动频率的 $1/2$, 也就是通常说的半频油膜涡动, Poincaré 映射图上有两个映射点, 半频涡动一直持续到 $\sigma=28$; 随着转速的进一步提高, 在 $\sigma=28$ 后, 出现了更为复杂的混沌运动, 即油膜振荡, 此时最大 Lyapunov 指数值大于零, 轨迹线是充满了一定的区域的复杂曲线, Poincaré 映射图具有分形结构; 随着转速的进一步增加, 转子的不平衡力也进一步增加, 当不平衡力大于油膜力后, 转子的运动就主要受不平衡力影响, 所以在 $\sigma=72$ 时, 轴心的运动又重新回到同步涡动, 直到轴颈碰撞到轴瓦, 出现绝对失稳。

3.3 失稳转速

轴心在一定转速下的运动是同步涡动, 当转速超过失稳转速 σ_c 后, 同步涡动就会分岔失稳, 出现油膜涡动或油膜振荡等现象。图 5(a) 为三油

叶轴承和椭圆轴承-转子系统失稳转速 σ_c 与参数 κ 的关系图。可以看出, 失稳转速 σ_c 与参数 κ 近乎成正比关系, 且同类参数条件下的椭圆轴承的稳定性要差于三油叶轴承。由于参数 κ 与转子质量 m 以及间隙的立方成反比关系, 这说明质量或间隙越大, 失稳转速越低, 不利于转子的稳定运行。

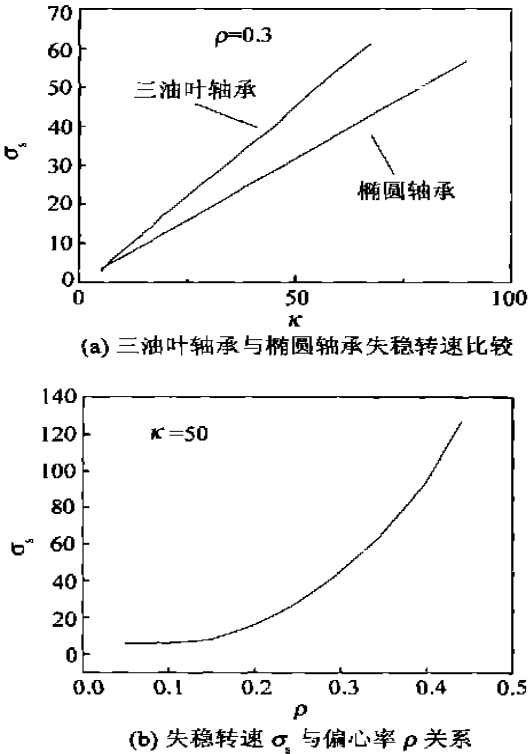


图 5 不同参数条件下的失稳转速

Fig 5 Threshold speed with various parameter

质量偏心对转子的动力行为也有很大的影响。图 5(b) 为 $k=50$ 时, 三油叶轴承失稳转速 α 与偏心率 ρ 的关系图。从该图可以看出, 随着偏心率 ρ 的增大失稳转速 α 也迅速增大; 当 $\rho \geq 0.45$ 后转子的运动就始终保持为同步涡动了。这是因为小的质量偏心对应于小的不平衡力, 在一定转速范围内更容易表现出油膜涡动或油膜振荡, 导致转子表现出倍周期、准周期、甚至混沌运动。而当质量偏心较大时, 不平衡力占优, 转子的运动就更易保持为同步涡动, 但应指出, 此时的同步涡动幅值也很大, 往往不能为工程应用所接受。

4 结 论

(1) 计算油叶型非线性油膜力的变分方法, 算法简单计算量小, 却有接近于有限元方法的精度。

(2) 转子的失稳转速随着转子质量以及轴承间隙的增大而降低, 对于给定的转子—轴承系统增大轴承间隙会使分岔提前, 不利于转子的稳定运行。同样参数条件下的椭圆轴承—转子系统的失稳转速低于三油叶轴承系统, 椭圆轴承的稳定性不如三油叶轴承。

(3) 中小质量偏心的不平衡转子系统, 失稳

前为稳定的同步涡动, 失稳后随着转速的增加出现了倍周期运动、准周期运动以及混沌运动等复杂的运动情况。较大质量偏心的不平衡转子由于不平衡力占优, 主要受不平衡力的影响, 运动情况比较简单, 始终是同步涡动。

参考文献

- [1] 张文 转子动力学理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1990
- [2] Zheng T, Hasebe N. Nonlinear Dynamic Behaviors of a Complex Rotor-Bearing System [J]. *ASME Journal of Applied Mechanics* 67, 2000: 485- 495
- [3] Someya T. Journal Bearing Databook [M]. *Springer-Verlag, Berlin, Germany*: 1988
- [4] Rohde S M, Li D F. A Generalized Short Bearing Theory[J]. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 1980, 102: 278- 282
- [5] Vance J M. *Rotor Dynamics of Turbomachinery* [M]. Wiley, New York: 1988
- [6] 陈伯贤, 裘祖干, 张慧生 流体润滑理论及其应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 1991: 51- 72
- [7] Rohde S M, M allister G T. A Variational Formulation for a Class of Free Boundary Problems Arising in Hydrodynamic Lubrication' [J]. *Int Jour Engng Sci* 13, 1975: 841- 850
- [8] Parker T S, Chua L O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems* [M]. New York: Springer-Verlag, 1989