

文章编号: 1000-8055(2004)03-0419-05

基于 Gompertz 模型的液体火箭发动机 可靠性增长分析

刘 琦, 冯 静, 周经伦

(国防科技大学 系统工程研究所, 湖南 长沙 410073)

摘要: 运用 Gompertz 模型和线性回归方法对液体火箭发动机批次试验中的可靠性增长因子进行分析, 对新产品的可靠性分布函数进行预测。结合产品的少量现场试验数据, 利用 Bayes 方法对系统的可靠性增长试验结果进行分析。文中首先给出了可靠性增长因子分析的模型, 然后运用历次阶段试验中的可靠性增长数据建立动态参数的递推估计模型, 在此基础上, 运用随机变量函数的分布, 给出各阶段可靠性增长试验中可靠性参数的 Bayes 估计。最后给出实例进行说明。

关键词: 航空、航天推进系统; Bayes 分析; 可靠性增长; 增长因子; Gompertz 模型; Weibull 分布

中图分类号: V 434; O 231. 2

文献标识码: A

The Reliability Growth Analysis for Liquid Rocket Engine According to The Gompertz Model

LIU Qi, FENG Jing, ZHOU Jing-lun

(National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In this paper, the Gompertz model and linear statistical method are used to analyze the growth factor of batch experiments for a liquid rocket engine. The reliability distribution of a new product is also forecasted. Then, Bayesian method is used to evaluate the reliability parameters of the products. In the article, first, the reliability growth analysis model is presented. Then with the reliability growth test data, a dynamic parameter iterative evaluation model is built. With the iterative model and field test data, the reliability evaluation of every stage can be calculated by Bayesian formula. Based on the distribution of function of the random variable, the reliability evaluation is given. An example is shown to illustrate this method.

Key words: aerospace propulsion system; Bayesian analysis; reliability growth; growth factor; Gompertz model; Weibull distribution

Bayes 方法已广泛应用于各种系统的可靠性分析中^[1, 2], 其优点是便于利用当前的试验信息和先验信息, 从而节省试验经费和时间, 而且分析方法程式化, 易于工程人员掌握。火箭发动机是集机、电、控、化等多学科于一体的复杂系统, 其现场

的可靠性试验量小, 属于小子样产品, 因此在进行系统的可靠性评估时应采用 Bayes 方法。

在火箭发动机的研制、使用过程中会对各种出现过的故障进行修正, 这属于工程可靠性增长^[3], 对发动机的可靠性增长研究是近年来发动

收稿日期: 2003- 09- 14; 修订日期: 2003- 11- 26

作者简介: 刘琦(1974-), 男, 山西运城人, 国防科技大学系统工程研究所博士生, 主要从事小子样复杂系统的可靠性分析、可靠性工程与质量管理研究

机可靠性研究的一个重要课题, 由于该问题具有重要的意义, 已引起国内外的重视。但是通过调研与检索参考资料发现, 由于试验经费、时间、保密等原因, 大型复杂系统, 尤其是武器系统的可靠性增长试验, 每次试验的样本量较小, 所以利用经典统计方法很难对系统的可靠性参数给出精确估计。

对复杂系统的动态可靠性增长分析是近年来系统可靠性研究的一个重要课题, 在现有的 Bayes 可靠性增长分析方法中, 多引用增长因子^[4, 5], 以此作为系统可靠性增长的标准进行分析, 但是在多数情况下, 增长因子由专家经验给出, 这样不可避免的会引入主观因素, 这是增长因子的一个不足之处。在本文中, 先利用发动机的历史试验数据或者类似型号发动机的试验数据, 对发动机的可靠性增长因子进行研究, 再结合少量的现场试验信息, 采用 Bayes 方法对发动机的可靠性增长进行分析。给出系统在某任务时刻可靠度的分布函数及其点估计。

1 产品可靠性的先验推断

Gompertz 模型^[3]是从时间序列分析中引用过来的, 是描述增长过程的一种手段。

Gompertz 曲线的特点是起初增长较慢, 随后逐渐加快, 到达某一点后, 增长速度又开始减慢。该曲线也可用于描述开始增长较快, 之后增长速度逐渐变慢的情况。不少产品在研制阶段和制造初期的可靠性符合这两种增长趋势。因此, Gompertz 模型有着相当广泛的应用, 它既适用于成败型试验信息, 也适用于寿命型试验信息; 既可用于设备、系统, 也可用于复杂系统, 如火箭、导弹等。

Gompertz 模型可以用来建立一种逐步评定产品当前可靠性及预测未来可靠性的方法, 是一种离散型的增长模型。

$$E(e_i) = 0, \quad \text{Var}(e_i) = \sigma^2 \quad (i = 1, \cdots, m)$$

$$\text{Cov}(e_i, e_j) = 0 \quad (i, j = 1, \cdots, m, \quad i \neq j)$$

则(3)式转化为:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \quad (5)$$

在已知前 m 阶段产品可靠性估计 $\hat{R}_1, \hat{R}_2, \cdots, \hat{R}_m$ 的前提下, 取:

$$y_i = \hat{R}_{i+1} / \hat{R}_i$$

记:

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_{m-1} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{m-1} \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{m-1} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

记产品在试验时间 t (t 可以是次数、批次等) 的可靠性为 $R(t)$, Gompertz 模型可写为:

$$R(t) = ab^{c^t} \quad (1)$$

式中, $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$ 。 a, b 和 c 的工程物理意义如下:

因 $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = a$, 故 a 是产品可靠性增长的上界。而 $\lim_{t \rightarrow 0} R(t) = ab$, 故 ab 是产品可靠性的初始水平。由于 $\lim_{t \rightarrow 0} R(t) / \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = b$, 故 b 是初始可靠性与极限可靠性之比。

参数 c 反映增长速度: c 值小, 增长速度快; c 值大, 增长速度慢。

在新产品的研制、开发过程中, 通过对故障模式、效应等的分析, 设计方力争消除危害性较强的故障模式, 当更新的设计起作用时, 就可以实现产品的可靠性增长, 于是有 $0 < R_1 < \cdots < R_m < R_{m+1}$, 其中 $m+1$ 为产品总的试验批次。可靠性增长的结果通过增长因子 g_i ($i = 1, 2, \cdots, m$) 来表示, 它在给定时间 t_0 下, 新旧阶段产品可靠度的比值:

$$g_i = \frac{R_{i+1}}{R_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \quad (2)$$

由公式(1)和(2)可以得出:

$$\ln g_i = i \ln c + \ln[(c-1) \ln b]$$

$$(i = 1, \cdots, m) \quad (3)$$

定义: $y_i = \ln g_i, \quad x_i = i$

$$\beta_0 = \ln[(c-1) \ln b], \quad \beta_1 = \ln c$$

则(3)式改写为:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \quad (4)$$

对(4)式的求解需借助于线性回归^[6]方法, 此时引入随机变量 e_i ($i = 1, 2, \cdots, m$), 其中 e_i 满足 Markov-Gauss 假设:

公式(5)可由矩阵形式表示为:

$$Y = X \beta + e \quad (6)$$

这样在得到前 m 阶段可靠度的估计结果 R_j ($j = 1, 2, \dots, m$) 后, 即可由(6)式得出 $\beta(\beta_0, \beta_1)$ 和 σ_0^2 的最小二乘估计:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \hat{Y}$$
$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{m-3} (\hat{Y} - X \hat{\beta})^T (\hat{Y} - X \hat{\beta}) \quad (7)$$

其中, $\hat{Y}$ 为 Y 在 R_j ($j = 1, 2, \dots, m$) 带入后的估计值。由前 m 阶段可靠性评定结果预报出第 $m+1$ 阶段系统可靠性的增长程度:

$$y_m = (1, x_m) \hat{\beta} \quad (8)$$

基于 Gauss-Markov 假设, 以正态分布 $N(y_m, \hat{\sigma}_0^2) \triangleq f(y_m)$ 作为 y_m 的分布, 由随机变量函数的分布推导^[7], 可以得到 g_m 的分布函数 $h(g_m)$, 如下:

$$\pi(R_{m+1}) = \frac{1}{R_m} \pi \frac{R_{m+1}}{R_m} \quad (11)$$

即:

$$\pi(R_{m+1}) = \frac{1}{R_m} \frac{1}{H \frac{R_{m+1}}{R_m}} h(1, 1/\hat{R}_m) \frac{R_{m+1}}{R_m} = \frac{1}{R_m} \frac{1}{H \frac{R_{m+1}}{R_m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \hat{\sigma}_0^2}} \frac{1}{\ln \frac{R_{m+1}}{R_m}} \cdot \exp \left[-\frac{\left(\ln \ln \frac{R_{m+1}}{R_m} - y_m \right)^2}{2\hat{\sigma}_0^2} \right] \quad (12)$$

2 发动机鉴定试验和似然函数

在发动机的研制过程中, 由于新产品的可靠性通常较高, 而且试验成本较大, 因此投入的样本量较小, 每个样本投试的时间较长(加延试验)。假设系统的鉴定试验中, 其截尾时间共有 n 个, 分别为 $t_1, \dots, t_n$

定义 N_j ($j = 1, \dots, n$) 为鉴定试验中在 t_j ($j = 1, \dots, n$) 时刻所投入的样本量, k_j ($j = 1, \dots, n$) 为失效个数, 则鉴定试验的似然函数为:

$$L(\text{Data} | R'_1, \dots, R'_n) = \prod_{j=1}^n (1 - R'_j)^{k_j} R'_j^{N_j - k_j} \quad (13)$$

其中, $R'_j = T(t_{ij})$ ($j = 1, \dots, n$) 为新产品在 t_j 时刻的可靠度, 再由 Weibull 分布的性质, 可由产品在 t_0 的可靠度值 R_{m+1} 得到 R'_j , 如下:

$$R'_j = R_{m+1}^{(t_j/t_0)^\beta} \quad (14)$$

将(14)式代入(13)式, 得到:

$$L(\text{Data} | \beta, R_{m+1}) = \prod_{j=1}^n (1 - R_{m+1}^{(t_j/t_0)^\beta})^{k_j} (R_{m+1}^{(t_j/t_0)^\beta})^{N_j - k_j} \quad (15)$$

$$h(g_m) = \frac{1}{g_m} \frac{1}{\ln(g_m)} f(\ln \ln g_m) \quad (9)$$

考虑到系统可靠性增长的具体情况, 考虑 g_m 分布为 $(1, 1/\hat{R}_m]$ 区间上的分布, 此时 g_m 的分布为:

$$\pi(g_m) = \frac{1}{H(g_m)} h(1, 1/\hat{R}_m)(g_m) \quad (10)$$

其中:

$$H(g_m) = \int_{1/\hat{R}_m}^{1/\hat{R}_m} h(g_m) dg_m$$

$h(1, 1/\hat{R}_m)(g_m)$ 为 $h(g_m)$ 在区间 $(1, 1/\hat{R}_m]$ 上的限制。

在 $\hat{R}_m$ 的基础上, $R_{m+1} = g_m \hat{R}_m$ 是随机变量的函数, 一旦确定了 g_m 的分布 $\pi(g_m)$, 则可以得出新产品可靠度 R_{m+1} 的分布。

定义:
$$r = \sum_{j=1}^n k_j$$

若产品的 r 个失效时刻已知, 设为 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$, 则(15)所示的似然函数可写为:

$$L(\text{Data} | \beta, R_{m+1}) = \left[\prod_{j=1}^n R_{m+1}^{(N_j - k_j)(t_j/t_0)^\beta} \right] \cdot \left[\prod_{k=1}^r \frac{\beta}{\tau_k} \left(\ln \frac{1}{R_{m+1}} \right) \left(\frac{\tau_k}{\beta} \right)^{\beta} R_{m+1}^{(\tau_k/t_0)^\beta} \right] \quad (16)$$

3 新产品可靠性的后验推断

公式(16)所给出的似然函数有两个未知参数 R_{m+1} 和形状参数 β , 所以需给出 R_{m+1} 和 β 的联合先验分布, 由(12)式可得到 R_{m+1} 的先验分布, 若可以得出 β 的先验分布 $\pi(\beta)$, 则由 Bayes 公式, 可以得出 R_{m+1} 和 β 的后验分布, 否则可以考虑选择下面两种分布之一作为 β 的先验分布^[1]。

3.1 无信息先验

在没有更多的其它信息的情况下, 定义:

$$g(\beta) \propto \frac{1}{\beta}, \quad \beta \geq \beta_0 \quad (17)$$

3 2 均匀密度

当可以知道参数 β 的边界的时候, 可以假定:

$$g(\beta) = \frac{1}{\beta_b - \beta_a}, \quad \beta_a \leq \beta \leq \beta_b \tag{18}$$

得出 R_{m+1} 和 β 的先验分布 $\pi(R_{m+1})$ 和 $\pi(\beta)$ 后, 结合现场试验数据, 可得出 R_{m+1} 和 β 的联合后验密度^[1]:

$$\begin{aligned} \pi(R_{m+1}, \beta | \text{Data}) &= \frac{\pi(R_{m+1})\pi(\beta)L(\text{Data} | R_{m+1}, \beta)}{\int_{\Theta_{R_{m+1}}} \int_{\Theta_{\beta}} \pi(R_{m+1})\pi(\beta)L(\text{Data} | R_{m+1}, \beta) d\beta dR_{m+1}} \\ &= \frac{h_{(1, \hat{1/R_m})} \frac{R_{m+1}}{R_m} \pi(\beta)L(\text{Data} | R_{m+1}, \beta)}{\int_{\Theta_{R_{m+1}}} \int_{\Theta_{\beta}} h_{(1, \hat{1/R_m})} \frac{R_{m+1}}{R_m} \pi(\beta)L(\text{Data} | R_{m+1}, \beta) d\beta dR_{m+1}} \end{aligned} \tag{19}$$

新系统可靠度的后验分布为边缘分布:

$$\pi(R_{m+1} | \text{Data}) = \int_{\Theta_{\beta}} \pi(R_{m+1}, \beta | \text{Data}) d\beta \tag{20}$$

得出 R_{m+1} 的后验分布后, 就可以计算得出其 Bayes 估计 R_B , 置信度为 γ 的置信下限估计 $R_L(\gamma)$ 等。当鉴定试验无失效数据时, 令 $k_i = 0, (i = 1, \cdots, m)$ 代入 (19) 式计算即可。

基于可靠性增长试验的假设: 由于各次试验的环境一致, 产品的改进是逐步进行的, 所以可以认为产品的失效机理变化较小, 从而可以认为 Weibull 分布形状参数的变动较小, 对 Weibull 分布来说, 失效机理不变, 既是形状参数不变^[8], 所以可以采用第 m 批产品形状参数的后验分布 $\pi(\beta_m | \text{Data})$ 作为第 $m+1$ 批产品形状参数的先验分布 (Bayes 相继率)^[1]。

由于 (19) 和 (20) 式解析计算比较复杂, 积分比较困难, 所以采用数值算法进行计算。有时为计算方便, 通常运用矩等效法^[1] 将 (12) 式所示的 R_{m+1} 的先验分布用 Beta 分布表示。

4 举 例

某火箭发动机的寿命服从 Weibull 分布, 系统经过 2 个阶段的可靠性增长试验, 其结果如表 2 所示, 又获得类似型号发动机在任务时间 600 s 的 4 个批次可靠性的评估结果如表 1 所示, 分析新系统 600 s 任务时间的可靠性。

由于形状参数未知, 在对新系统第 1 个试验阶段的数据进行分析时, 结合工程实际, 采用文献 [1, 3] 上的均匀分布作为形状参数的先验。用 Bayes 方法结合第 1 阶段试验数据, 得到可靠性的评估结果如表 3 所示。将第 1 阶段的评估结果

带入模型 (6), 形状参数采用第 1 阶段得到的形状

表 1 前 4 个批次可靠性分析结果

Table 1 Reliability analysis results of the 4 previous stages

阶段	可靠性	阶段	可靠性
1	0.8201	3	0.9487
2	0.9106	4	0.9601

表 2 发动机可靠性试验数据

Table 2 Reliability test data of the engine

阶段	截尾时间 (试验次数)	失效时间
1	100 (5), 500 (3)	89
2	150 (3), 500 (1)	

表 3 发动机可靠性分析结果

Table 3 Reliability analysis result of the engine

阶段	1	2
$\hat{\beta}_0$	- 1.1223	- 1.1127
$\hat{\beta}_1$	- 1.0853	- 1.0911
$\hat{\sigma}_0^2$	0.01455	0.00733
$\hat{R}_i$	0.9642	0.9678
$\hat{R}_B$	0.9641	0.9687

参数的后验分布, 运用 Bayes 方法分析得到如表 3 所示的第 2 阶段的评定结果。其中 $\hat{R}_i$ 为第 1、2 阶段可靠性的预测值, $\hat{R}_B$ 为 Bayes 估计。

5 结 论

在本文中, 基于 Gompertz 模型, 推导出系统可靠性增长因子随试验批次的变化公式, 然后结合线性统计模型, 求解出增长因子的分布函数, 进而得到现场可靠性增长试验下产品可靠性的先验分布。这样结合少量的现场试验样本, 运用 Bayes 方法即可对现场试验后产品的可靠性参数进行评定。该方法分析步骤明确, 便于采用计算机编程实现。需要指出的是:

(1) 文中给出了 Weibull 模型下产品可靠性的分析方法, 类似地对公式 (13) 的似然函数进行适当修改后, 读者可以对指数分布、二项分布等试验数据进行分析。

(2) 例子中表 1 的数据为 $a=0.9662$, $b=0.6117$, $c=0.3378$ 的可靠性或增长数据, 而表 2 所示的数据分别为尺度参数 $\eta=3200$ s, $\eta=3350$ s, 形状参数 $\beta=2.015$ 的 Weibull 分布的仿真数据。通过计算可以看出, 可靠性增长评估的精度较高。出现第一阶段可靠性评估结果偏低的原因是

存在一个失效数据。

(3) 由本文的例子可以看出, 该方法评估小样本可靠性增长试验, 比经典方法的结果更为精确。

参考文献

[1] 张金槐, 唐雪梅. Bayes 方法[M]. 湖南长沙: 国防科技大学出版社, 1990

[2] James O Berger. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis (Second Edition) [M]. Springer - Verlag New York, Inc , 1985

[3] 周源泉, 翁朝曦. 可靠性增长[M]. 北京: 科学出版社, 1992

[4] 党小玲. 柔性制造系统可靠性增长管理与分析技术研究[D]. 湖南长沙: 国防科学技术大学, 1999

[5] Maurizio Guida, Gianpaolo Pulcini. Automotive Reliability Inference Based on Past Data and Technical Knowledge[M]. Reliability Engineering and System Safety 76(2002): 129-137.

[6] 王松桂, 陈敏, 陈立萍. 线性统计模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999

[7] 《现代数学手册》随机数学卷[M]. 湖北武汉: 华中科技大学出版社, 1999

[8] 安伟光, 周源泉. 液体火箭发动机失效的 Weibull 分布环境因子[J]. 推进技术, 1997, 18(3): 10- 14