

文章编号: 1000-8055(2005) 01-0159-05

# GA 在摩擦力作用下变位斜齿轮传动模糊可靠优化中的应用

李秀莲, 董晓英, 曹清林, 雷良育  
(江苏技术师范学院 机械系, 江苏 常州 213001)

**摘要:** 针对传统齿轮强度理论中所存在的不足, 在充分考虑齿间摩擦力的前提下, 结合模糊可靠设计理论、优化设计技术和遗传算法的优点, 提出了基于遗传算法的变位斜齿圆柱齿轮传动的模糊可靠优化设计方法。通过实例计算表明, 遗传算法在变位斜齿圆柱齿轮传动的优化设计方面, 效果很好。

**关键词:** 航空、航天推进系统; 遗传算法; 齿间摩擦; 变位斜齿圆柱齿轮; 模糊可靠优化  
**中图分类号:** TH132.41 **文献标识码:** A

## Application of Genetic Algorithm to the Fuzzy Reliability Optimal Design of Profile Modified Helical Gear Under The Action of Friction

LI Xiu-lian, DONG Xiao-ying, CAO Qing-lin, LEI Liang-yu  
(Department of Mechanical Engineering,  
Jiangsu Teachers University of Technology, Changzhou 213001, China)

**Abstract:** Considering the limitation and deficiencies in traditional gear strength theory, based on genetic algorithm, a new method of fuzzy reliability optimal design for the profile modified helical gear transmission in consideration of the action of sliding friction between teeth is presented. This method combines fuzzy reliability design theory with optimization technique and excellences of genetic algorithm. The calculated result shows that the proposed method is effective for the optimum design of profile modified helical gear transmission.

**Key words:** aerospace propulsion system; genetic algorithm (GA); sliding friction between teeth; profile modified helical gear; fuzzy reliability optimum

用变位修正法来制造渐开线齿轮, 不仅可避免根切, 而且与标准齿轮相比, 这样切出的齿轮除了分度圆、基圆及齿距不变外, 其齿厚、齿槽宽、齿廓曲线的工作段、齿顶高和齿根高等都发生了变化。因此, 可以用该方法来提高齿轮机构的存载能

力、配凑中心距和减轻机构的几何尺寸等; 而且在切制这种齿轮时, 仍使用标准刀具, 并不增加制造的困难。正因为如此, 变位齿轮传动在各种机械中被广泛地应用。

长期以来, 在齿轮强度计算中均不考虑齿间

收稿日期: 2004- 01- 09; 修订日期: 2004- 06- 24

作者简介: 李秀莲(1971- ), 男, 安徽六安人, 江苏技术师范学院机械系讲师, 硕士, 主要从事优化设计、机械振动、噪声及其控制研究。

摩擦力的作用<sup>[1,2]</sup>。但随着齿轮传动向高速、重载方向发展的加快及研究的不断深入,人们发现齿间摩擦力对齿轮强度的影响并不能轻易忽视<sup>[3~5]</sup>。另外,在齿轮传动的设计过程中,存在着一些不确定的现象,主要表现为各设计参数的随机性和模糊性。而常规设计方法中,往往忽略各设计参数的随机性和模糊性,将所有设计参数均作为确定量来考虑;因此,设计出的方案很难与客观实际相符。遗传算法(Genetic Algorithm, 简称 GA) 是一种模拟生物进化机制的搜索和优化方法,即根据生物进化规律,对一个随机产生的群体进行繁殖演变和自然选择,使适者生存;如此代代循环,使群体素质及群体中个体素质不断进化,并通过群体中个体的多样性实现对解空间的多点同时搜索,并最终有效地收敛于全局最优解。

基于以上因素,本文结合工程实践,以一对外啮合变位斜齿圆柱齿轮传动为研究对象,通过应用模糊可靠设计理论,采用遗传算法对齿间摩擦力作用下变位斜齿圆柱齿轮传动进行模糊可靠优化。实例表明,效果很好。

### 1.3 模糊可靠性约束

#### 1.3.1 齿面接触应力分布

由文献[2,4],笔者推导出摩擦力作用下变位斜齿轮齿面接触疲劳应力为:

$$\sigma_H = Z_E Z_H \cdot \frac{2K T_1}{\Phi_d d_1^3} \cdot \frac{u+1}{u} \cdot \frac{1+3f^2}{1-f \tan \alpha} = Z_E Z_H \frac{2K T_1}{\Phi_d d_1^3} \cdot \frac{u+1}{u} \lambda(f) \quad (3)$$

式中:  $f$  为齿间摩擦因数;  $\lambda(f)$  为摩擦影响因子;  $\alpha'$  为变位斜齿轮端面啮合角; 其余参数见文献[2,6]。

对以图表形式给出的各个参数、系数可经过曲线拟合将其化为函数形式,代入式中计算。假定  $u, m_n, z_1, \alpha'$  和  $\Phi_d$  为确定值,其余各参数、系数按随机变量来处理,并认为均呈正态分布。则得到变位斜齿圆柱齿轮齿面接触应力的变异系数、均值和标准差<sup>[7~10]</sup>分别为:

$$C_{\sigma_H} = \left[ C_{Z_H}^2 + C_{Z_E}^2 + C_{\lambda(f)}^2 + \frac{1}{4} (C_K^2 + C_{T_1}^2 + C_{d_1}^2) \right]^{1/2} \quad (4)$$

$$\overline{\sigma_H} = \overline{Z_E Z_H} \frac{2K T_1}{\Phi_d d_1^3} \cdot \frac{u+1}{u} \lambda(f) \quad (5)$$

$$S_{\sigma_H} = \overline{\sigma_H} \cdot C_{\sigma_H} \quad (6)$$

式中:  $\overline{Z_H}, C_{Z_H}, \overline{Z_E}, C_{Z_E}, \dots$ , 分别为相应参数  $Z_H, Z_E, \dots$  的均值和变异系数。

#### 1.3.2 齿根弯曲应力分布

由文献[2,5],笔者推导出摩擦力作用下变位斜齿轮齿根弯曲疲劳应力为:

$$\sigma_{Fi} = \frac{2K T_1 Y_{Fai} Y_{Sai} Y_{\beta} \cos^4 \beta}{\Phi_m m_n z_i^2 \cos \beta_b} \rho_i(f) \quad (7)$$

式中,当脚标  $i$  取 1(2) 时表示为小(大)齿轮的有关参数;  $\rho_i(f)$  为摩擦影响因子; 其余参数见文献[2,6]。

为便于计算,笔者给出了摩擦影响因子的主要计算式:

## 1 模糊可靠优化数学模型

### 1.1 目标函数

由于齿轮体积对节约材料、减轻重量及占用空间等方面有较大的现实意义,故常取齿轮传动的体积和为目标函数。为计算方便,以齿轮分度圆体积近似替代变位斜齿圆柱齿轮的体积,则目标函数为:

$$\min F(x) = \frac{\pi \Phi_d (1 + \frac{u^2}{3}) m_n z_1^3}{4 \cos^3 \beta} \quad (1)$$

式中:  $\Phi_d$  为齿宽系数;  $u$  为齿数比;  $z_1$  为小齿轮的齿数;  $m_n$  为齿轮法面模数;  $\beta$  为螺旋角。

### 1.2 设计变量

在传递功率和传动比既定情况下,变位斜齿圆柱齿轮传动设计的独立设计参数为  $x_{n1}, x_{n2}, m_n, z_1, \Phi_d, \beta$  即:

$$x = \{x_{n1}, x_{n2}, m_n, z_1, \Phi_d, \beta\}^T \quad (2)$$

式中:  $x_{n1}$  为小齿轮法面变位系数;  $x_{n2}$  为大齿轮法面变位系数。

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(f) &= \frac{1+f\left[1+\frac{\Delta h_1}{h_{Fa1}}\right] \tan \alpha_{an1}}{1+f \tan \alpha_{at1}} \\ \rho_2(f) &= \frac{1+f\left[1+\frac{\Delta h_2}{h_{Fa2}}\right] \tan \alpha_{an2}}{1+f\left[\tan \alpha' + \frac{z^2}{z_1}(\tan \alpha' - \tan \alpha_{at2})\right]} \\ \Delta h_i &= \frac{m_n}{2}\left(z_{vi}+2 h_{an}^{*}+2 x_{ni}-2 \Delta y\right)\left(\tan \alpha_{ani}+\operatorname{ctan} \alpha_{fani}\right) \cdot \\ &\quad\left[\frac{\pi}{2 z_{vi}}+\frac{2 x_{ni} \tan \alpha_n}{z_{vi}}-\operatorname{inv} \alpha_{vi}+\operatorname{inv} \alpha_n\right] \\ h_{Fa} &=\left(2 h_{an}^{*}+c_n^{*}-\Delta y\right) m_n-\frac{m_n}{2}\left(z_{vi}+2 h_{an}^{*}+2 x_{ni}-2 \Delta y\right) \cdot \\ &\quad\left[\frac{\pi}{2 z_{vi}}+\frac{2 x_{ni} \tan \alpha_n}{z_{vi}}-\operatorname{inv} \alpha_{vi}+\operatorname{inv} \alpha_n\right] \tan \alpha_{ani} \\ \alpha_{fani} &=\tan \alpha_{vi}-\frac{\pi}{2 z_{vi}}-\frac{2 x_{ni} \tan \alpha_n}{z_{vi}}-\operatorname{inv} \alpha_n \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$(i=1,2,3) \quad (12)$$

式中各参数见文献[2, 6, 11]。

分析思路同上, 可得变位斜齿圆柱齿轮齿根弯曲疲劳应力的变异系数、均值和标准差分别如下:

$$C_{\sigma_{Fi}} = \left[ C_K^2 + C_{T_1}^2 + C_{Y_{Fai}}^2 + C_{Y_{Sai}}^2 + C_{\rho_i(f)}^2 + C_{Y_{\beta}}^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

$$\overline{\sigma_{Fi}} = \frac{2 K T_1 Y_{Fai} Y_{Sai} Y_{\beta} \cos^4 \beta}{\Phi m_n z_1 \cos \beta} \rho_i(f) \quad (10)$$

$$S_{\sigma_{Fi}} = \overline{\sigma_{Fi}} \cdot C_{\sigma_{Fi}} \quad (11)$$

式中参数意义同上。

1. 3. 3 齿轮强度模糊可靠性约束

工程上假设齿面接触应力和齿根弯曲应力均服从正态分布, 则其概率密度函数为:

$$p_i(x) = \frac{1}{2 \pi S_{\sigma_i}} \exp \left[ -\frac{(x - \overline{\sigma_i})^2}{2 S_{\sigma_i}^2} \right]$$

1. 3. 4 设计变量及其它参数的上下限约束

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{x}_{n1} &\leq x_{n1} \leq \overline{x}_{n1} \\ \underline{x}_{n2} &\leq x_{n2} \leq \overline{x}_{n2} \\ \underline{m}_n &\leq m_n \leq \overline{m}_n \\ \underline{z}_1 &\leq z_1 \leq \overline{z}_1 \\ \underline{\Phi}_n &\leq \Phi \leq \overline{\Phi}_n \\ \underline{\beta} &\leq \beta \leq \overline{\beta} \end{aligned} \right. \quad \text{与} \quad \left\{ \begin{aligned} \underline{\alpha}_i &\leq \alpha_i \leq \overline{\alpha}_i \\ \underline{u} &\leq u \leq \overline{u} \\ \underline{\epsilon}_\alpha &\leq \epsilon_\alpha \leq \overline{\epsilon}_\alpha \end{aligned} \right. \quad (15)$$

式中:  $\underline{\alpha}_i$  为法面压力角下限,  $\overline{\alpha}_i$  为法面压力角上限, 其余参数意义雷同。

式中:  $\overline{\sigma_i}$  和  $S_{\sigma_i}$  分别表示大小两轮齿面接触应力和齿根弯曲应力的均值和标准差。

当强度隶属函数为  $\mu_i(x)$  时, 则齿轮强度的模糊可靠度为:

$$R_i = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_i(x) p_i(x) dx \quad (13)$$

若设计要求的齿面和齿根可靠度分别为  $R_{H0}$ ,  $R_{F10}$  和  $R_{F20}$ , 可得出齿轮强度的模糊可靠性约束为:

$$\left\{ \begin{aligned} R_H &\geq R_{H0} \\ R_{F1} &\geq R_{F10} \\ R_{F2} &\geq R_{F20} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

式中:  $R_H$  为齿面接触强度的模糊可靠度;  $R_{F1}$  为小齿轮齿根弯曲强度的模糊可靠度;  $R_{F2}$  为大齿轮齿根弯曲强度的模糊可靠度。

2 遗传算法下模糊可靠优化数学模型的求解

2.1 模糊约束的隶属函数

人们常用模糊设计理论中的隶属函数来表示齿轮应力等参数从完全许用到完全不许用的中介过渡过程。隶属函数的形式随约束的性质不同而不同,工程上,根据设计要求和齿轮传动约束条件的性质,对各约束条件模糊函数均采用线性隶属函数。

(1) 性能约束

$$\mu(g)=\begin{cases}1 & (g^U\leq g) \\ \frac{g-g^L}{g^U-g^L} & (g^L\leq g\leq g^U) \\ 0 & (\text{其它情况})\end{cases}$$

(16)

(2) 几何约束

$$\mu(q)=\begin{cases}1 & (q^U\leq q\leq q^L) \\ \frac{q-\bar{q}^U}{q^L-\bar{q}^U} & (\bar{q}^L\leq q\leq \bar{q}^U) \\ \frac{q^L-q}{q^L-q^U} & (q^L\leq q\leq q^U) \\ 0 & (\text{其它情况})\end{cases}$$

(17)

上面隶属函数中, $\bar{q}^U,\bar{q}^L,q^U$ 及 $q^L$ 分别为过渡区间的上下界,它们的取值可以在普通设计规范和设计要求的基础上,采用扩增系数法加以确定。

2.2 模糊优化数学模型的转化

为了便于方程的求解,可通过寻求最优水平值 $\lambda^*$ ,利用最优水平截集法将模糊模型等价转化为如下最优水平截集上的普通优化模型:

求  $\min F(x)=\frac{\pi\Phi u(1+u^2)m_{nZ}^3}{4\cos^3\beta}$

$x=\{x_{n1},x_{n2},m_n,z^1,\Phi,\beta\}^T$

s.t.  $g_i\geq g_i^L+\lambda^*(g_i^U-g_i^L)$

$(i=1,2,3)$

$q_j\geq q_j^L+\lambda^*(q_j^U-q_j^L)$

$(j=1,2,\cdots,9)$

$q_j\leq \bar{q}_j^U-\lambda^*(\bar{q}_j^U-\bar{q}_j^L)$

(18)

式中: $g_i$ 分别代表式(14)中的 $R_H,R_{F1}$ 及 $R_{F2}$ ;  $q_j$ 分别代表式(15)中的 $x_{n1},x_{n2},m_n,z^1,\Phi,\beta,\alpha,u,\infty$

2.3 基于遗传算法的非模糊优化求解

应用遗传算法<sup>[12]</sup>对式(18)求最优解,其算法流程图见图1。

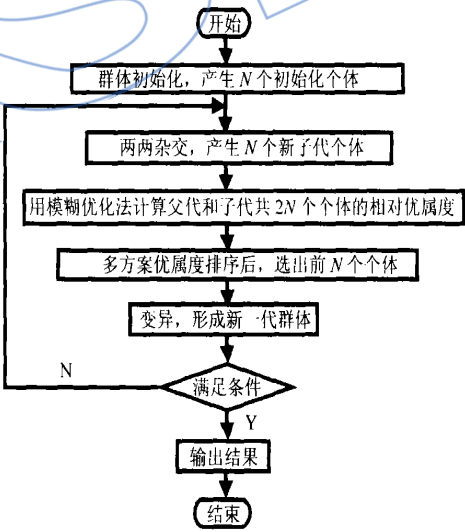


图 1 遗传算法流程图

Fig. 1 Flow-process diagram of Genetic Algorithm

3 工程实例

某单级闭式渐开线斜齿圆柱齿轮减速传动,已知传递功率 $P_1=10\text{ kW}$ ,主动轮转速 $n_1=970\text{ r/min}$ ,齿数比 $u=4$ ,齿间摩擦因数 $f=0.14$ ,对称布置,单向运转,三班制工作,工作寿命10年,大小两轮均为45#钢,两轮均为8级精度;齿轮传动的模糊可靠度为 $R=0.978$ ,小齿轮调质,硬

度  $HBS = 217 \sim 255$ ; 大齿轮正火, 硬度  $HBS = 162 \sim 217$ 。试采用遗传算法对该齿轮传动进行模糊可靠性优化设计。

根据题目要求, 利用本文介绍的方法对其进行优化设计。

- (1) 按式(1)建立优化设计的目标函数。
- (2) 确定齿轮齿面变位系数  $x_{n1}$  和  $x_{n2}$ , 齿面模数  $m_n$ , 小齿轮的齿数  $z_1$ , 齿宽系数  $\Phi$ , 螺旋角  $\beta$  为设计变量。
- (3) 按式(14)及(15)建立本例题优化设计的模糊可靠性约束条件。

(4) 综合考虑设计水平、制造水平、使用材料、重要程度等模糊因素, 采用二级模糊综合评判方法, 确定最优水平值  $\lambda^*$ , 然后通过利用最优水平截集法将模糊优化问题转化为最优水平截集上的非模糊优化问题, 最后采用遗传算法进行优化求解。

根据文中求解方法, 设计变量求解如下(限于篇幅, 过程略去):

$$\begin{aligned} x_{n1} &= 0.35, & x_{n2} &= -0.35 \\ m_n &= 3 \text{ mm}, & z_1 &= 22 \\ \Phi &= 0.816, & \beta &= 10^\circ 15' 20'' \end{aligned}$$

对应的目标函数为:

$$\min F^*(x) = 3\,287\,338.539 \text{ mm}^3$$

如考虑摩擦力情况下, 采用常规设计方法, 设计变量为:

$$\begin{aligned} x_{n1} &= 0.36, & x_{n2} &= -0.36 \\ m_n &= 3 \text{ mm}, & z_1 &= 23 \\ \Phi &= 0.914, & \beta &= 10^\circ 18' 32'' \end{aligned}$$

对应的目标函数为:

$$F(x) = 4\,209\,552.633 \text{ mm}^3$$

由此可见, 采用本文方法, 该斜齿轮传动体积可减小:

$$\frac{F(x) - \min F^*(x)}{F(x)} \times 100\% = 21.9\%$$

## 4 结束语

(1) 本文针对传统齿轮强度理论中所存在的不足和缺陷, 给出了齿间摩擦力作用下变位斜齿轮强度计算公式。一系列的研究表明, 齿间摩擦力对齿轮强度的影响的确不容忽视。

(2) 本文综合考虑影响斜齿轮传动的各种因

素的随机性、模糊性, 因而建立的数学模型和求解方案更接近于客观实际。

(3) 由于遗传算法是从多个点同时开始寻优, 因此其求解过程收敛速度快, 且可获得整个优化问题的全局最优解。

## 参考文献:

- [1] 朱孝录, 鄂中凯. 齿轮承载能力分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992: 191~244.
- [2] 濮良贵, 纪名刚. 机械设计[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997: 207~229.
- [3] 诸文俊, 温正忠, 范顺成. 齿轮传动的摩擦学设计[J]. 机械科学与技术, 1999, 18(3): 390~391.  
ZHU Wen-jun, WEN Zheng-zhong, FAN Shun-cheng. Tribological Design of Gear Drive[J]. *Mechanical Science and Technology*, 1999, 18(3): 390~391.
- [4] 沈伟, 徐辅仁. 齿间摩擦对齿轮轮齿表面疲劳强度的影响[J]. 机床与液压, 2001, 29(6): 70~73.  
SHEN Wei, XU Fu-ren. The Effect of the Friction Between Teeth on the Contact Fatigue Strength of the Tooth Surfaces of a Gearing[J]. *Machine Tool & Hydraulics*, 2001, 29(6): 70~73.
- [5] 徐辅仁, 沈伟. 齿间摩擦力对齿根弯曲应力的影响[J]. 兵工学报, 2001, 22(4): 520~523.  
XU Fu-ren, SHEN Wei. Effect of Friction Between Teeth on the Bending Fatigue Stress at the Root of Gear Tooth[J]. *ACTA Armamentarii*, 2001, 22(4): 520~523.
- [6] 齿轮手册编委会编. 齿轮手册(上册)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2001.
- [7] 牟致忠. 可靠性设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 1993: 325~343.
- [8] 姜培刚, 刘晓斌. 基于遗传算法的圆锥齿轮传动模糊优化[J]. 机械设计, 2001, 18(6): 27~28.  
JIANG Pei-gang, LIU Xiao-bin. Fuzzy Optimization Design of Taper Gears Driving on Account of Genetic Algorithm[J]. *Machine Design*, 2001, 18(6): 27~28.
- [9] 王建中, 傅湘林, 曾芳, 等. 基于 GA 的普通圆柱螺旋弹簧的模糊优化设计[J]. 武汉工业大学学报, 2000, 22(2): 38~65.  
WANG Jian-zhong, FU Xiang-lin, ZHENG Fang, et al. The Fuzzy Optimum Designing of the Universal Cylinder Spiral Spring Based on Genetic Algorithm[J]. *Journal of Wuhan University of Technology*, 2000, 22(2): 38~65.
- [10] 刘杨松, 李文方编著. 机械设计的模糊学方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996: 163~170.
- [11] 孙桓, 陈作模. 机械原理[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997: 304~314.
- [12] [日]玄光男, 程润伟著. 遗传算法与工程设计[M]. 汪定伟, 等译. 北京: 科学出版社, 2000: 100~125.