

文章编号: 1000-8055(2006) 01-0007-06

使用 GAO-YONG 模型对不可压圆管湍流的计算

王绪伦, 高 歌

(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

摘要: 基于有限体积法思想运用SIMPLER方法PLS格式求解轴对称柱坐标系下的GAO-YONG方程组,对管流边界层以及圆管湍流的自然转捩过程进行数值模拟。结果表明,方程不仅对于边界层流动的内层壁面律和外层亏损律能作出良好的预测,而且能够预报层流-湍流转捩过程中摩阻系数和速度型的变化。

关键词: 航空、航天推进系统; GAO-YONG湍流模型; 湍流; 转捩; 圆管流动

中图分类号: O357.5; V211.1

文献标识码: A

Numerical Simulation of Incompressible Turbulence in Tubes Using GAO-YONG Turbulence Model

WANG Xu-lun, GAO Ge

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Two-dimensional, axisymmetric, stationary, and incompressible Hagen-Poiseuille flow was numerically simulated with GAO-YONG turbulence model using SIMPLER (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) method and PLS (Power Law Scheme). As a result, the calculation successfully simulates the flow and predicts the fundamental properties of the boundary layer, including the natural transition process, which are close to the experimental data. It verifies the adaptability of GAO-YONG turbulence equations to real turbulent flow.

Key words: aerospace propulsion system; GAO-YONG turbulence model; turbulence; transition; Hagen-Poiseuille flow

湍流问题一直是流体力学中的经典难题。湍流在日常生产生活中非常普遍,在工程中也极为常见,几个世纪以来人们为此做出了不懈的努力并提出了种种基于Navier-Stokes方程的湍流理论模型^[1],虽然在一些比较简单的算例上得到了让人满意的结果,但经验系数的引入以及本质上的物理机制不明晰所导致的通用性差却是他们共

同的特点,离工程应用的目标还有相当大的距离。在这种情况下,对湍流的研究,理论意义和工程价值无疑都十分巨大。

文献[1]从唯象理论出发在统计侧偏平均的基础上提出了GAO-YONG湍流模型,这套理论各向异性的涡团粘性假设比以往的模型更接近真实流动的特点,漂移流机械能方程将漂移流与平

均流联系起来, 并由此可以确立本构方程的表达式, 从而封闭了方程组。导出的方程组保留了脉动场的信息^[2], 求解它就能获得湍流流动中更详细的细节描述。这点在对平板边界层流动、平面射流以及后台阶流动的算例中都得到了很好的验证, 2000 年又对圆射流进行了成功的模拟, 解决了圆射流/平面射流的异常现象问题。

圆管流动形式上非常简单, 在人们生活当中极为常见, 对它的实验研究也已经相当成熟, 早在十九世纪30年代末Hagen 和Poiseuille 就已经得出了充分发展的圆管层流(Hagen-Poiseuille flow)的解析解^[3], 而后Spalding 等人也给出了圆管湍流的相关细节的经验公式, 但对于圆管湍流转捩问题, 至今没有一个湍流模型能给出不含经

验系数的描述: 首先是对自然转捩目前流行的几种湍流模型都不能给出符合物理真实现象的模拟; 其次, 对by-pass 及强制激励转捩, 一些湍流模型可以做出模拟, 但难于排除人为因素的影响, 有相当失真度。本文的主要工作就是尝试应用GAO-YONG 模型, 不使用任何经验系数, 对不可压的光滑圆管湍流自然转捩问题进行比较细致而深入的数值研究, 以求更好的反映自然转捩过程的物理实质。

1 控制方程

方程的具体推导见文献[2], 这里直接给出二维轴对称、定常、不可压情况下GAO-YONG 模型方程组柱坐标系的形式^[4], 如下所示:

平均流连续方程:

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \frac{\bar{u}_r}{r} \quad (1)$$

平均流 r 向动量方程:

$$\bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial x^2} - \frac{\bar{u}_r}{r^2} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xr}}{\partial x} + \frac{\bar{\sigma}_r}{r} \right) \quad (2)$$

平均流 x 向动量方程:

$$\bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xr}}{\partial r} + \frac{\bar{\sigma}_{xr}}{r} \right) \quad (3)$$

漂移流连续方程:

$$\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} = \frac{\tilde{u}_r}{r} \quad (4)$$

漂移流 r 向动量方程:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \bar{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial x} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}_r}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial x^2} - \frac{\tilde{u}_r}{r^2} \right) - \\ & \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial x^2} - \frac{\bar{u}_r}{r^2} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xr}}{\partial x} + \frac{\tilde{\sigma}_r}{r} \right) - \\ & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xr}}{\partial x} + \frac{\bar{\sigma}_r}{r} \right) - \left(\tilde{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \tilde{u}_x \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

漂移流 x 向动量方程:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial r} + \bar{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}_x}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial x^2} \right) - \\ & \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xr}}{\partial r} + \frac{\tilde{\tau}_{xr}}{r} \right) + \\ & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xr}}{\partial r} + \frac{\bar{\tau}_{xr}}{r} \right) - \left(\tilde{u}_r \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} + \tilde{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

漂移流机械能方程:

$$\begin{aligned} \xi : \nabla \bar{u} = & l_r \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial r} + \nu_l \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial x^2} - \frac{\bar{u}_r}{r^2} \right) - \right. \\ & \nu_l \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial x^2} - \frac{\bar{u}_r}{r^2} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xr}}{\partial x} + \frac{\bar{\sigma}_r}{r} \right) - \\ & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xr}}{\partial x} + \frac{\bar{\sigma}_r}{r} \right) - \left(\bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} \right) + \\ & l_x \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial x} + \nu_l \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} \right) - \right. \\ & \nu_l \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xr}}{\partial r} + \frac{\bar{\tau}_{xr}}{r} \right) + \\ & \left. \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xr}}{\partial r} + \frac{\bar{\tau}_{xr}}{r} \right) - \left(\bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \tag{7}$$

本构方程:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_x \\ \tau_{rx} \end{bmatrix} = 2[\mathbf{T}]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} |\xi_{11}| & -\frac{2}{3} |\xi_{22}| & 0 \\ -\frac{2}{3} |\xi_{22}| & \frac{4}{3} |\xi_{22}| & 0 \\ 0 & 0 & |\xi_{12}| + |\xi_{21}| \end{bmatrix} [\mathbf{T}] \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_x \\ \epsilon_{rx} \end{bmatrix}$$
$$\xi_{ij} = l_j \tilde{u}_i \tag{8}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{rx}}{\sigma_r - \sigma_x} \right) \tag{9}$$

其中: $\bar{u}_r, \bar{u}_x, \bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\sigma}_x$ 和 $\bar{\tau}_{rx}$ 分别为平均流的速度、压力和湍流应力; $\tilde{u}_r, \tilde{u}_x, \tilde{p}, \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_x$ 和 $\tilde{\tau}_{rx}$ 分别为漂移流的速度、压力和湍流应力; ρ 和 ν_l 分别为流体的密度和运动粘性系数; l 为漂移位矢, 方向与流体微元的拉伸主轴方向一致, 二维情况下其方向由 (9) 式决定; 本构方程由涡团粘性系数张量 ξ 表出, $[\mathbf{T}]$ 矩阵为从拉伸主轴变换到计算坐标系下的坐标变化矩阵。 β 是漂移流与主流的夹角。需要注意的是漂移流机械能方程的右端项实际上就是漂移流动量方程的右端项与漂移位矢的点乘^[5]。

2 数值计算方法

本文所采用的数值计算方法基于有限体积法的思想。

首先是方程组的离散, 在本文中, 对流项采用幂函数格式, 扩散项采用中心差分格式^[6]。对于圆管流动而言, 在没有特别强烈的扰动情况下, 采用上述离散格式已经能达到我们的目的。

网格划分采用先画控制体积再确定节点的方法, 为了避免出现不满足连续性方程的压力场, 采用与主网格错开半个网格的交错网格来存储速度。

离散后的方程求解采用修订的SIMPLE(Se-

mi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations)方法即SIMPLER方法, 它的主要思想是用假定的或上一次迭代算出的速度场计算压力, 再通过压力校对方程对速度进行校正(不再对压力进行校正)^[7]。

由此形成的五对角的代数方程组使用交替方向逐线迭代的TDMA方法来求解。

方程组的具体求解步骤如下:

- (1) 给定初始的速度场;
- (2) 求解漂移流压力方程得到漂移压力场;
- (3) 求解漂移流动量方程得到速度场;
- (4) 求解漂移流压力修正方程修正漂移速度场;
- (5) 求解漂移流机械能方程得到本构方程的各个系数;
- (6) 求解平均流压力方程得到平均流压力场;
- (7) 求解平均流动量方程得到平均速度场;
- (8) 求解平均流压力修正方程修正平均速度场;
- (9) 判断收敛, 若否, 返回步骤2, 重复上述步骤直到收敛为止。

3 计算结果

网格布置。轴向均布, 径向靠近管壁处加密。由于圆管流动达到充分发展的阶段时的位置与来流 Re 数有很大关系, 在较高的雷诺数时, 充分发展的管长与直径的比值 L/D 可达到 40 以上, 为了不使网格过于稀疏, 本文中计算域采用 1.0×0.01 的子午面, 即: $L/D = 50, 120 \times 60$ 网格布置。

边界条件的处理。进口: 层流时 $u = 1.0$, 湍流时 $u = 2.0 \times [1 - (r/r_0)^2]$, 其余量赋零; 出口外推; 管壁处使用无滑移条件; 轴线处除 u 外推外其余赋零。

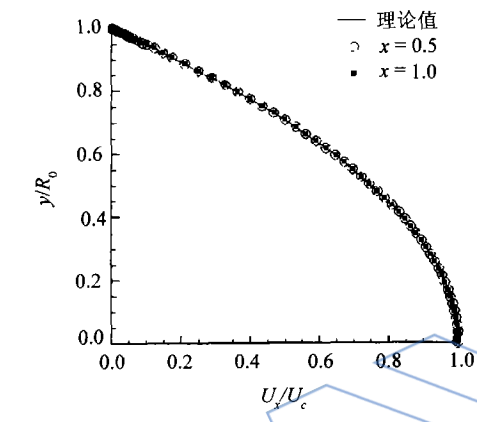


图1 层流速度型
Fig. 1 Laminar radial velocity profile

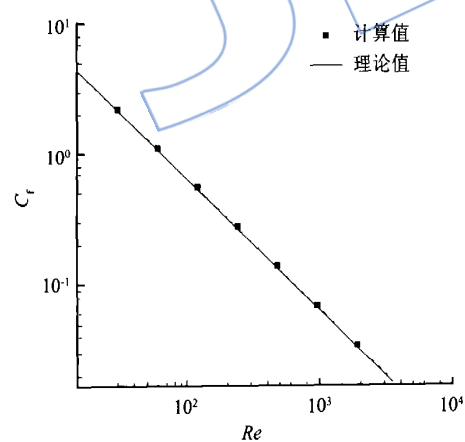


图2 层流摩擦系数
Fig. 2 Laminar coefficient of friction resistance

在对圆管湍流进行数值研究之前, 作为对计算程序的验证, 对圆管层流的计算是必要的。对于圆管层流, 在完全发展的层流内的速度分布是一条抛物曲线, $u = -\frac{dp}{dx} \frac{r_0^2 - r^2}{4\mu}$, 壁面摩擦系

数 $\Lambda = 64/Re_d^{[8]}$, 图1 和图2 分别是来流 $Re = 1\,000$ 时圆管层流速度型的计算值与理论值的比较和层流摩擦系数的计算值与理论值的比较(R_0 为圆管半径, U_c 为中心线轴向流速, 以下同)。

从上述计算结果可以看出, 计算程序对层流的描述是非常精确的。在此基础上再加上 GAO-YONG 湍流模型。文献[7]中指出对于湍流的计算, 入口条件对计算结果有较大影响。笔者在本文中采取了如下的处理措施: 赋给进口图1所示的层流速度型。如图3所示, 在来流 $Re = 30\,000$ 的情况下, 由层流向湍流发展的速度型变化。从图中可以看出, 在贴近管壁的区域, 轴向速度对径向的梯度逐渐增大, 而速度型也越来越饱满。这是由于湍流流动中具有相当强的动量掺混作用, 使得速度更为平均。轴线处达到最大流速^[8], 与平均流速的比值为 1.25 左右, 与尼古拉兹资料一致^[9]。

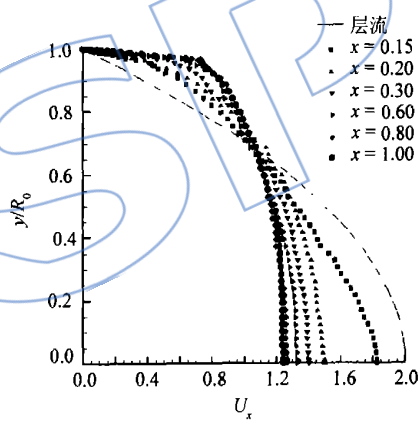


图3 $Re = 30\,000$ 时速度型的发展
Fig. 3 Development of Velocity Shape ($Re = 30\,000$)

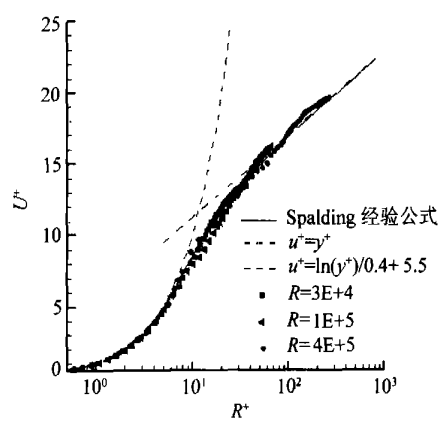


图4 内层壁面律
Fig. 4 Wall-function law

图4是充分发展区内的内层律。对数律的经验公式采用文献[8]的建议,使用Nikuradse在1930年给出的经验系数。可以看出,管流中的尾迹比较小,计算值与经验公式吻合得相当好。

图5是不同雷诺数下的外层亏损律。管流中没有间歇性,因而管流外层的速度亏损大大减小。图中的实验数据采用文献[9]的经验公式:

$$\frac{U-\bar{u}}{u_*} = 5.65 \log \frac{R_0}{y}$$

可以看出,在接近轴线的区域,计算值与实验数据基本一致,也就是说在外层的速度分布基本符合真实的湍流。

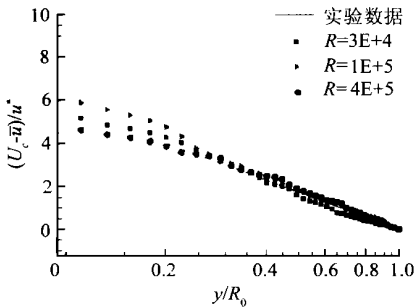


图5 外层亏损律
Fig.5 Velocity defect law

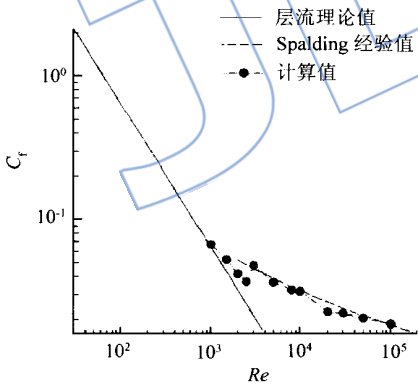


图6 转捩过程中的摩擦系数变化
Fig.6 Coefficient of frictional resistance
in transition

工程上最关心的是壁面摩擦系数,因为它直接关系到流动的阻力。图6所示就是 $L_e/D=40$ 时层流向湍流转捩过程中的摩擦系数变化图。实线表示层流的摩擦系数 $\Lambda=64/Re_d$,虚线表示Spalding给出的湍流摩擦系数经验公式。雷诺数在500到100 000之间变化,由图中可以看到,光滑圆管湍流的自然转捩发生在2 000到4 000之间,这与

实验室里测得的数据是一致的。

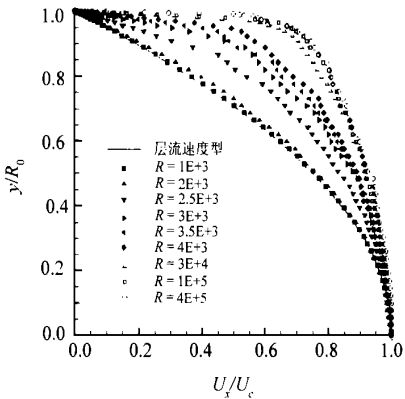


图7 转捩过程中速度型的变化
Fig.7 Radial velocity profile in transition

图7为不同雷诺数下的速度型,由图中可以看出,在雷诺数2 000到4 000之间,速度型变化剧烈,这正是层流向湍流转捩的区域。一般商用的管子雷诺数超过4 000之后就肯定是湍流了,如果保持足够好的进口条件和光滑度,保持层流流动的雷诺数可以达到100 000以上。本算例假定光滑管壁,考虑到这个因素,所以可以看到雷诺数到4 000时,速度型还不是十分饱满,这与物理实际是吻合的。后期速度型变化不大,只是随着雷诺数 Re 的增大,速度型的分布曲线越来越饱满。由该图可以很清楚的看到圆管流动层流变成湍流这一过程的发生,与从实验中得到的结论是大致一样的。

4 结 论

对光滑管壁的圆管流动的模拟结果表明,在没有引入传统的壁面修正和经验系数的情况下,GAO-YONG模型具有很好的适应能力,对真实湍流具有很强的描述能力。对于圆管湍流的自然转捩及充分发展湍流区内的各项参数壁面摩擦系数、内层律等都能做良好的预测,进一步显示了GAO-YONG模型在工程应用上的巨大潜力。

参考文献:

[1] David C Wilcox. Turbulence Modeling for CFD[M]. DCW Industries, Inc, 1993: 99~103.
[2] Ge Gao, Yan Yong. Partial-Average-Based Equations of Incompressible Turbulent Flow[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2004, 39: 1407~1419.
[3] 陈慈章. 粘性流体动力学基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[4]

Baoyu Guo, Tim A. Langrish G. David F Fletcher. Numerical Simulation of Unsteady Turbulent Flow in Axisymmetric Sudden Expansions[J]. *Journal of Fluids Engineering*, 2001, 123: 574~587.

[5]

Li Weibing, Gao Ge. The Solution of Round-Jet/ Plane Jet Anomaly Using GAO-YONG Incompressible Turbulence Equations[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2001, 16(3): 262~266.

[6]

Patankar S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow [M]. *New York: Mcgraw-Hill*, 1980.

[7]

陶文铨. 计算传热学的近代发展[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[8]

怀特著 F M. 粘性流体动力学[M]. 魏中磊, 甄思淼译. 北京: 机械工业出版社, 1982.

[9]

戴莱 J W, 哈里曼 D R R 著. 流体动力学[M]. 郭子中, 陈玉璞译. 北京: 人民教育出版社, 1981.

致谢审稿人

《航空动力学报》对 2005 年第 20 卷第 1~6 期审稿专家们的辛勤劳动和对本刊的大力支持表示衷心的感谢!

第 20 卷审稿专家名单(按姓氏笔画为序)

丁水汀	于达仁	马一太	马宏伟	王震华	王保国	王仲奇	王延荣	王华芳	王荣桥
王家骅	王正明	王 曦	王先炜	王建军	王 慧	方宗德	尹泽勇	叶中元	叶志峰
宁方飞	吉洪湖	孙 茂	孙建国	孙纪国	朱之丽	朱恒伟	朱梓根	朱惠人	朱孝业
朱名铨	毕志献	刘大响	刘火星	刘兴洲	刘 波	刘启洲	刘 宇	刘尚明	刘占生
刘友宏	刘松龄	刘成瑞	乔志德	乔渭阳	吕亚东	吕文林	任兴民	任玉新	李继保
李 军	李应红	李志信	李舜酩	李 锋	李 峥	李卫国	李树索	李 嵩	李其汉
李宏新	苏卫东	苏 彬	吴玉林	吴建军	吴丁毅	吴行章	吴 宏	吴大观	何立明
何洪庆	张振鹏	张 峥	张 津	张靖周	张宏武	张会强	张德良	张克实	严传俊
宋保银	宋迎东	杨士杰	杨茂林	闵振华	汪 亮	邹正平	孟庆明	孟 光	周柏卓
周正贵	陈大光	陈国定	陈焕倬	陈启智	陈海昕	林宇震	季路成	单 鹏	罗 汀
尚 义	昂海松	茆诗松	邵万仁	欧阳祖行	岳珠峰	岳连捷	陆 山	陆亚钧	赵晓路
赵福星	赵坚行	钟易成	姚 华	胡 骏	侯政杰	侯凌云	姜培学	姜彩虹	聂超群
饶寿期	郑克扬	袁修干	崔海涛	徐国强	徐惊雷	徐燕骥	高 歌	高德平	夏智勋
顾维藻	顾铭企	秦卫阳	董文华	陶增元	郭迎清	郭海丁	常士楠	康 锐	符 松
黄熙君	黄伟光	黄金泉	黄太平	梁德旺	温卫东	龚梦贤	桂幸民	曹义华	曹用涛
曹玉璋	程荣辉	程 涛	程 礼	程谋森	韩启祥	景晓东	蒋浩康	彭晓峰	廉筱纯
蔡元虎	蔡体敏	楚武利	虞 烈	鲍 文	廖明夫	樊思齐	樊未军	樊 丁	魏志军