

文章编号: 1000-8055(2005)03-0413-05

改进整体传递矩阵法计算复杂转子系统临界转速

李育锡, 王三民

(西北工业大学 机电工程学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 提出了一种基于整体传递矩阵法的改进传递矩阵法。新方法将Riccati变换及奇点消除方法应用于整体传递矩阵方程, 导出了耦合单元和非耦合单元的Riccati传递矩阵计算公式。这种方法克服了传统传递矩阵法的缺点, 易于开发通用计算程序。文末给出了数值算例, 计算结果表明了该方法的有效性和正确性。

关键词: 航空、航天推进系统; 复杂转子系统; 整体传递矩阵法; 临界转速; 奇点消除

中图分类号: V 231.9; TH 113.1

文献标识码: A

Application of the Improved Whole Transfer Matrix Method to the Calculation of Complex Rotor Critical Speed

LI Yu-xi, WANG San-min

(School of Mechatronic Engineering,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: A new method based on the whole transfer matrix method (WTMM) was proposed. The Riccati transformation and singularity elimination were applied to the whole transfer matrix equation, and the formula of Riccati transfer matrix of coupling element and non-coupling element was derived. This improved method can avoid drawbacks of traditional method, and it is easy to develop a general computer program. Finally, a numerical example was given. The results show that the method is effective and accurate.

Key words: aerospace propulsion system; complex rotor system; whole transfer matrix method; critical speed; singularity elimination

大型气轮发电机组或现代航空发动机常常由两个转子甚至3个转子组合而成, 转子之间通过弹性或刚性支承连接, 有的采用套齿联轴器。对于这种具有多转速、多转子、多连接方式、多种支承形式的复杂转子系统, 为了计算其临界转速和振型, 人们在传统传递矩阵理论的基础上提出了许多方法, 诸如传递矩阵-阻抗耦合法, 模态综合法

以及整体传递矩阵法等^[1~5]。但是上述方法计算临界转速时, 如果转子结构复杂, 系统自由度数增多, 容易出现计算机数值溢出、精度不足或振型畸变等缺点。

为此, 本文在上述研究的基础上提出了一种改进的整体传递矩阵法。这种方法把Riccati变换应用于多转子系统的整体传递矩阵, 导出了转子

收稿日期: 2004-06-30; 修订日期: 2004-12-16

基金项目: 航空科学基金资助项目(02C53019)

作者简介: 李育锡(1951-), 男, 陕西武功人, 西北工业大学机电学院副教授, 主要从事机械设计及动力学方面的教学和研究

系统的运动方程, 导出了经过耦合单元和非耦合单元时的Riccati变换矩阵; 由于Riccati矩阵方程的奇点常会引起漏根和错根, 文中给出了消除奇点的方法。

本文方法同时发挥了整体传递矩阵法和Riccati传递矩阵法的优点, 具有计算精度高, 数值稳定性好等特点。最后给出了数值算例, 并与拉格朗日方程所得精确解作了对比, 验证了该方法的正确性。

1 整体传递矩阵法

1.1 计算模型

图1所示为某双转子发动机模型, 所有支承均为弹性支承, 联轴器也为弹性联轴器。分为两个子结构: 低压转子、高压转子。各子结构根据自身情况划分单元, 然后在适当的位置添加虚设单元, 以使各子结构单元数相同, 且逻辑对齐, 以便于整

体传递, 虚单元即长度为0, 质量为0的单元。

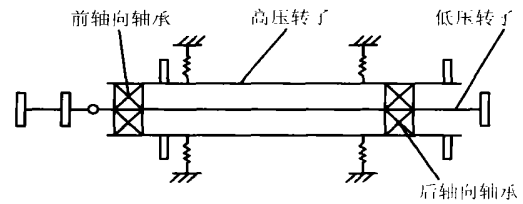


图1 某双转子发动机模型

Fig 1 The model of twin-rotor engine

1.2 整体传递矩阵法简介

一般假定的理想单元为: 一段等截面无重轴, 参数为 l, A, I ; 左端为一圆盘, 参数为 m, J_p, J_d ; 有弹性支承, 其刚度系数为线刚度 K , 力矩刚度 K_h 。不完全单元令其相应参数为零。轴自转速度 ω 公转角速度 Ω 。计算时, 考虑陀螺力矩和剪切变形的影响, 单元传递矩阵为:

$$[U]_i = \begin{bmatrix} 1 + \frac{l^3}{6EI} (1 - \gamma) (m\Omega^2 - K) & l + \frac{l^2}{2EI} [J\Omega^2 + K_h] & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} (1 - \gamma) \\ \frac{l^2}{2EI} (m\Omega^2 - K) & l + \frac{l}{EI} [J\Omega^2 + K_h] & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ (m\Omega^2 - K) & J\Omega^2 + K_h & 1 & 1 \\ m\Omega^2 - K & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 $J = J_p \frac{\omega}{\Omega} - J_d$ 为当量转动惯量, $\gamma = \frac{6EI}{k_t GA l^2}$ 为考虑剪切影响的系数, G 为材料剪切模量, A 为截面面积, k_t 为截面系数。

设系统有 n 个子结构(转子、畸形部分、机匣), 可整体划分为 m 个单元, 为了实现整个结构沿一条直线传递, 把各子结构相应节点的状态向量放在同一列中, 构成整体状态向量, 把各子结构相应单元的传递矩阵放在同一方阵中, 构成整体传递矩阵。第 i 站的整体状态向量为:

$$Z_i = \{Z^I \quad Z^{II} \quad \cdots \quad Z^n\}^T$$

第 i 单元的整体传递矩阵以左对角阵写为:

$$U_i = [u^{(i)}]_i$$

假设在第 i 站和第 j 站存在耦合, 则整个结构的传递形式为:

$$Z_{m+1} = U_m \cdots U_{j-1} RS_j U_j \cdots U_{j+1} RS_i U_i \cdots U_1 Z_1$$

其中: $Z^I, \cdots, Z^n$ 代表各子结构的状态向量; $Z_1, \cdots, Z_m$ 代表各站的整体状态向量; $u^{(1)}, \cdots, u^{(n)}$ 代表各子结构的单元传递矩阵; $U_1, \cdots, U_m$ 代表各单元的整体传递矩阵; RS 为耦合矩阵。

在整体传递矩阵的传递过程中, 如果遇到耦合点则乘以耦合矩阵。如此, 整个结构在从最左端

传递到最右端之后, 就得到: $Z_{m+1} = T_{4n \times 2n} V_1$ 。其中 Z_{m+1} 为最右端(自由端)的整体状态向量, V_1 为最左端(自由端)的未知参数列阵, $T_{4n \times 2n}$ 为传递后得到的行列式矩阵。

由上式可得方程组 $D_{2n \times 2n} V_1 = 0$, 从而可得频率方程 $|D_{2n \times 2n}| = 0$ 。解此频率方程就可求得所需各阶临界转速, 进而求得相应各阶振型。

整体传递矩阵法将转子系统视为一个整体, 节点状态向量从头递推到尾。如果转子系统的节点数比较多或者转速较高, 由于一般传递矩阵法可能产生病态矩阵, 导致计算精度降低或引起数值不稳定现象。因此, 有必要对整体传递矩阵法进行改进。

2 整体传递矩阵法的改进及奇点消除

2.1 系统运动方程的推导

本文以图1所示的双转子($n=2$)系统为例, 推导基于Riccati变换和消除奇点的双转子系统运动方程, 假设划分为 m 个单元。

单根轴的第 i 个单元, 其状态向量为:

$[Z]_i = [y \quad \alpha \quad M \quad Q]^T_i$

对于双转子计算模型, 在整体传递过程中, 从第 i 站到第 $i+1$ 站的传递形式为:

$$Z_{i+1} = \begin{bmatrix} U^I & 0 \\ 0 & U^{II} \end{bmatrix}_i Z_{i+1} \tag{2}$$

将同一截面状态参数列阵 Z 划分为两个分块, 即变形参数块 e 和内力参数块 f , 则上式可写为:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ e_1 \\ \vdots \\ f_2 \\ e_2 \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}^I & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}^{II} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} f_1 \\ e_1 \\ \vdots \\ f_2 \\ e_2 \end{Bmatrix}_i \tag{3}$$

令:

$$F = [f_1 \quad f_2]^T \quad E = [e_1 \quad e_2]^T \quad T_{11} = \begin{bmatrix} u_{11}^I & 0 \\ 0 & u_{11}^{II} \end{bmatrix}$$
$$T_{12} = \begin{bmatrix} u_{12}^I & 0 \\ 0 & u_{12}^{II} \end{bmatrix} \quad T_{21} = \begin{bmatrix} u_{21}^I & 0 \\ 0 & u_{21}^{II} \end{bmatrix} \quad T_{22} = \begin{bmatrix} u_{22}^I & 0 \\ 0 & u_{22}^{II} \end{bmatrix}$$

则式(3)可写成如下形式:

$$\begin{Bmatrix} F \\ \vdots \\ E \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} T_{11} & \vdots & T_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{21} & \vdots & T_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} F \\ \vdots \\ E \end{Bmatrix}_i \tag{4}$$

将上式展开为:

$$\{F\}_{i+1} = [T_{11}]_i \{F\}_i + [T_{12}]_i \{E\}_i \quad \{E\}_{i+1} = [T_{21}]_i \{F\}_i + [T_{22}]_i \{E\}_i \tag{5}$$

根据Riccati 基本原理引入如下变换:

$$\{F\}_i = [S]_i \{E\}_i \tag{6}$$

式中 $[S]_i$ 为Riccati 传递矩阵, 它是一个4 阶的待定矩阵。将(6)代入(5)中得:

$$\{E\}_i = [T_{21}S + T_{22}]_i^{-1} \{E\}_{i+1} \tag{7}$$

$$\{F\}_{i+1} = [T_{11}S + T_{12}]_i [T_{21}S + T_{22}]_i^{-1} \{E\}_{i+1} \tag{8}$$

对比(6) 式和(8) 式可得到双转子系统基于Riccati 变换的传递矩阵公式:

$$S_{i+1} = [T_{11}S + T_{12}]_i [T_{21}S + T_{22}]_i^{-1} \tag{9}$$

上式便是双转子系统非耦合单元的Riccati 传递矩阵计算公式, S 为 4×4 阶矩阵, 根据始端边界条件 $\{F\}_1 = 0, \{E\}_1 \neq 0$, 故有初始条件 $[S]_1 = 0$, 代入式(9) 就可依次递推得 $[S]_2, \cdots, [S]_i, \cdots, [S]_m$ 。由末端边界条件 $\{F\}_m = 0, \{E\}_m \neq 0$ 可得:

$$F_m = S_m E_m \tag{10}$$

由于Riccati 传递矩阵法的剩余量曲线存在许多异号无穷型奇点, 文献[6]分析了Riccati 矩阵奇点的物理本质和产生原因, 提出了消除奇点的独特方法, 得出如下频率方程式:

$$\Delta = |S_m| \prod_{i=1}^m |[T_{21}S + T_{22}]_i| = 0 \tag{11}$$

或者使用一个更简单的频率方程式:

$$D = |S_m| \prod_{i=1}^m \text{sign}(|T_{21}S + T_{22}|_i) = 0 \tag{12}$$

上述方法避免了求解时存在的漏根和错根现

象。对于3 转子、4 转子等多转子结构的求解可用

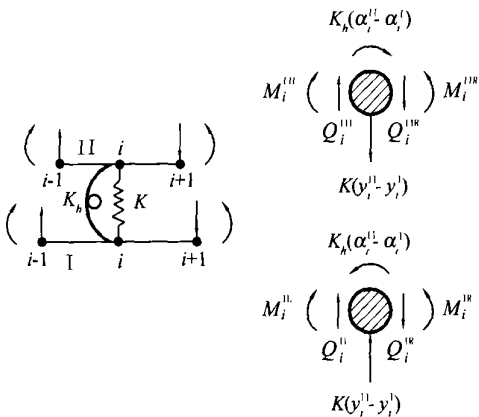


图2 双转子耦合
Fig 2 Coupling rotors

以上方法类推。

2 2 耦合矩阵的Riccati变换

耦合矩阵就是满足耦合点协调条件的矩阵。在整体传递矩阵的递推过程中若遇到耦合点则乘以耦合矩阵。各种耦合点总是两两连接,今以双转子I转子:

$$y_i^{IR} = y_i^{IL}$$
$$M_i^{IR} = M_i^{IL} - K_h(\alpha_i^{II} - \alpha_i^I)$$

II转子:

$$y_i^{IIR} = y_i^{IIL}$$
$$M_i^{IIR} = M_i^{IIL} + K_h(\alpha_i^{II} - \alpha_i^I)$$

写成矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} F \\ \vdots \\ E \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} I & \vdots & G \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & I \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} F \\ \vdots \\ E \end{Bmatrix}_i^L \tag{13}$$

其中: I 为4阶单位矩阵, G 为耦合处的刚度矩阵。

$$G = \begin{bmatrix} 0 & K_h & 0 & -K_h \\ -K & 0 & K & 0 \\ 0 & -K_h & 0 & K_h \\ K & 0 & -K & 0 \end{bmatrix}_i \tag{14}$$

把式(13)展开:

$$\{F\}_i^R = \{F\}_i^L + [G]_i \{E\}_i^L \qquad \{E\}_i^R = \{E\}_i^L \tag{15}$$

由前面的推导可知 $\{F\}_i^L = [S]_i^L \{E\}_i^L$, 将其和式(15)的第2式代入到第1式得:

$$\{F\}_i^R = ([S]_i^L + [G]_i) \{E\}_i^R \tag{16}$$

因为:

$$\{F\}_i^R = [S]_i^R \{E\}_i^R \tag{17}$$

对比(16)和(17)两式有:

$$[S]_i^R = ([S]_i^L + [G]_i) \tag{18}$$

此即为经过耦合点时与式(9)相当的一个传递关系式, $[S]_i^R$ 求得后,就可继续向右传递,当遇到耦合点时,按照(18)式进行类似变换,直至传递到整个转子系统的末端截面,根据末端截面条件,列出转子系统的频率方程。

2 3 临界转速与振型的确定

递推求得末端截面上的Riccati传递矩阵 S_m 后,根据终止端的边界条件可建立如(10)式所示的关系。其系数矩阵应满足 $\Delta = \det S_m = 0$,即为双转子系统频率方程。在给定误差精度下,采用二分法或者弦割法求出系统的各阶固有频率 Ω ,然后根据(10)式和(9)式的递推关系可求得相应的转子系统各截面上的状态参数。通过归一化处理,可得到双转子系统的振型。

子为例导出基于Riccati变换的耦合矩阵。

如图2所示I转子和II转子弹性连接,其线刚度为,力矩刚度为。假设耦合点在第站,在此站分别研究I转子和II转子的受力,根据力的平衡,列出各自的协调方程。

3 计算实例

图3所示为具有2个中介支承的双转子系统计算模型,转子系统的原始数据见文献[9]。

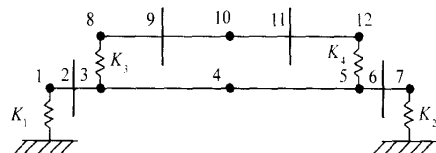


图3 具有2个中介支承的双转子系统计算模型

Fig 3 A two-rotor system with two intershaft bearings

应用本文方法计算得到的双转子系统临界转速结果列于表1。

表1 固有频率计算结果(正向涡动, rad/s)

Table 1 The computational results of example (F)

阶数	本方法解	精确解	误差/%
1	400. 736	400. 436	0. 074 9
2	894. 418	894. 410	0. 000 8
3	1 433. 098	1 432. 092	0. 070 2
4	1 829. 754	1 829. 741	0. 000 7
5	2 119. 297	2 119. 298	0. 000 0
6	3 056. 711	3 056. 654	0. 001 8
7	3 422. 409	3 422. 186	0. 006 5
8	3 721. 977	3 721. 941	0. 001 0
9	4 752. 989	4 752. 938	0. 001 1
10	12 033. 944	12 033. 929	0. 000 1

文献[5]给出了使用整体传递矩阵法计算该实例的固有频率结果。通过与表1中的结果比较可知,本文方法的计算精度总体上优于整体传递矩阵法;通过进一步计算发现,当2个转子之间的连接刚度取得较大时,本文方法与整体传递矩阵法相比,具有较好数值稳定性。

4 结 论

(1) 本文提出的方法较好的解决了传统传递矩阵法计算临界转速时数值溢出、振型畸变等缺点;解决了计算临界转速时发生错根和漏根的技术难题。

(2) 应用本文研究得到的方法和计算公式,同时发挥了整体传递矩阵法和Riccati变换的优点,编程容易、计算精度高,具有良好的数值稳定性。

参考文献:

[1] 黄太平. 转子动力学中传递矩阵阻抗耦合法[J]. 航空动力

学报, 1988, 3(4): 315~318
Huang Tai'ping The Transfer Matrix Impedance Coupling Method in Rotor Dynamics [J]. Journal of Aerospace Power, 1988, 3(4): 315~318
[2] Huang Tai'ping The Transfer Matrix Impedance Coupling Method for the Eigensolutions of Multi-Spool Rotor Systems [J]. Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Transactions of ASME, 1988, 110: 468~472
[3] 赵明, 魏德明, 仁平珍, 等. 模态综合法计算双转子临界转速研究[J]. 燃气涡轮试验与研究, 2003, 16(3): 38~41.
ZHAO Ming, WEI De'ming, REN Ping-zhen Study of Twin-Rotor Critical Speed by Mode Synthesis [J]. Gas Turbine Experiment and Research, 2003, 16(3): 38~41.
[4] 蒋书运, 陈照波, 须根法, 等. 用整体传递矩阵法计算航空发动机整机临界转速特性[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1998, 30(1): 32~35
JIANG Shu-yun, CHEN Zhao-bo, XU Gen-fa, XIA Song-bo Analysis of Natural Frequency Characteristics by Whole Transfer Matrix Method for Turboengine Multi-Rotors [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 1998, 30(1): 32~35
[5] 柴山, 刚宪约, 姚福生, 等. 计算多转子系统临界转速的整体传递矩阵法[J]. 上海理工大学学报, 2002, 24(1): 8~12
CHAI Shan, GANG Xian-yue, YAO Fu-sheng A Whole Transfer Matrix Method for Calculating the Critical Speed of Multi-Rotor System [J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2002, 24(1): 8~12
[6] 王正. Riccati 传递矩阵法的奇点及其消除方法[J]. 振动与冲击, 1987(2): 74~78
WANG Zheng The Singularity of the Riccati Transfer Matrix Method and a Method for Its Being Eliminated [J]. Journal of Vibration and Shock, 1987(2): 74~78
[7] 晏砺堂, 朱梓根, 宋兆泓, 等. 结构系统动力特性分析[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989
[8] 闻邦春, 顾家柳, 夏松波, 等. 高等转子动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1999
[9] 总编委会编. 航空发动机设计手册[Z]. 转子动力学及整机振动, 北京: 航空工业出版社, 2000