

文章编号: 1000-8055(2005)04-0600-06

非线性支承转子的动平衡

唐云冰, 罗贵火, 章璟璇, 高德平

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 江苏 南京 210016)

摘要: 影响系数法是利用线性系统中校正量和被测量之间的线性关系进行转子动平衡。实际应用中, 转子系统往往是支承在具有非线性刚度的轴承上。由于线性假设不成立, 直接使用影响系数法进行转子动平衡将十分困难。本文运用 Lagrange 方程和柔度影响系数, 建立了非线性支承多盘转子系统的动平衡计算模型, 提出了运用优化算法对非线性系统进行等效线性化来平衡非线性支承转子的方法。计算实例表明转子由不平衡量引起的振动得到了大幅度减少, 达到了非线性支承转子动平衡的目的, 效果良好。

关键词: 航空、航天推进系统; 转子动平衡; 非线性支承; 影响系数法; 转子动力学

中图分类号: TH113.25

文献标识码: A

Rotor Balancing Taking Nonlinear Stiffness Characteristics into Account

TANG Yun-bing, LUO Gui-huo, ZHANG Jing-xuan, GAO De-ping

(College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210026, China)

Abstract: The linear relationship between the corrected value and measured value is used to balance the rotor in the influence coefficient method. When rotor are supported on the bearings having nonlinear stiffness characteristics, it would be difficult to balance the rotors since linear hypothesis would not be valid. The motion equation of a multiple-degree rotor system is formulated by using Lagrange equation and flexibility influence coefficients. The equivalent linearization model of the nonlinear multiple-degree system is used to balance the nonlinear system in this paper. The example shows that the vibration response caused by unbalance mass reduces greatly and the method developed in this paper is successful.

Key words: aerospace propulsion system; rotor balancing; nonlinear stiffness; influence coefficient; rotor dynamic

转子振动过大会直接危及机组的安全运行。引起转子振动过大的因素很多, 如转子不平衡、油膜失稳、碰摩、转子内阻、以及转子不对中等, 其中尤以转子不平衡引起的振动最为普遍, 所以高速旋转机械的转子都必须进行严格的动平衡。

现有的柔性转子动平衡方法可分为两大类:

振型平衡法和影响系数法。其中影响系数法操作简单, 使用灵活, 尤其适用于与计算机结合, 辅助计算平衡量, 使平衡工作趋于自动化, 在转子动平衡中得到了广泛应用。然而利用影响系数法进行转子动平衡计算时, 转子模型中采用了线性假设, 但实际转子却常常受到非线性因素的影响。例如

收稿日期: 2004-05-18; 修订日期: 2004-09-16

基金项目: 国防基础科研基金资助(01B52008)

作者简介: 唐云冰(1979-), 男, 四川成都人, 南京航空航天大学能源与动力学院博士生, 主要从事转子动力学的研究

高速旋转机械,尤其是微小型航空发动机中广泛采用的滚动轴承,其刚度特性就是非线性的。为了提高动平衡精度,需要考虑轴承非线性刚度的影响。应用非线性理论研究转子—轴承—基础系统的非线性动力学特性已成为当前非线性转子动力学研究的主要内容^[1]。许多文献讨论了非线性因素对转子动平衡的影响^[2]方法,但大量实践表明非线性转子系统的动平衡相当困难。

1 非线性支承转子的运动方程

研究非线性支承转子的动平衡方法,首先要建立非线性支承转子的运动方程。图 1 为两端分别支承在非线性轴承上的多盘转子系统^[3]。

一般情况下滚动轴承的阻尼比较小。为了简化计算,方程推导中忽略了阻尼和陀螺力矩的影响。用Lagrange 方程和柔度法建立多盘转子系统的运动方程^[4]。由于势能中含有变形的高次项,所以方程为非线性的。

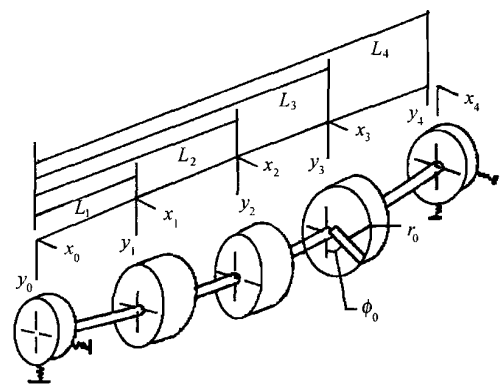


图 1 非线性支承的多盘转子系统
Fig 1 Multimass rotor system supported on nonlinear bearings

转子的势能由轴承变形和转轴的弹性变形两部分组成。用 x_i 和 y_i 表示转子的变形, x_i^* 和 y_i^* 表示轴承变形引起的转子变形。因此,转轴引起的转子的弹性变形可用 $\{u\}_x$ 和 $\{u\}_y$ 表示:

$$\{u\}_x = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, \cdots, x_n - x_n^*)^T$$

(5)

$$\{u\}_y = (y_1 - y_1^*, y_2 - y_2^*, \cdots, y_n - y_n^*)^T$$

(6)

滚动轴承的非线性支承刚性可表示为具有二次非线性项^[5],如式(3)所示。

$$\left. \begin{aligned} K_{xx}^{1B} &= k_{xx}^{1B} + \epsilon^{1B} x_0^2, & K_{yy}^{1B} &= k_{yy}^{1B} + \epsilon^{1B} y_0^2 \\ K_{xx}^{2B} &= k_{xx}^{2B} + \epsilon^{2B} x_{n+1}^2, & K_{yy}^{2B} &= k_{yy}^{2B} + \epsilon^{2B} y_{n+1}^2 \end{aligned} \right\}$$

(3)

轴承变形的势能为:

$$\begin{aligned} V_1 = & \int_0^0 (K_{xx}^{1B} x) dx + \int_0^0 (K_{yy}^{1B} y) dy + \int_0^{n+1} (K_{xx}^{2B} x) dx + \int_0^{n+1} (K_{yy}^{2B} y) dy = \\ & \int_0^0 (k_{xx}^{1B} x + \epsilon^{1B} x^3) dx + \int_0^0 (k_{yy}^{1B} y + \epsilon^{1B} y^3) dy + \\ & \int_0^{n+1} (k_{xx}^{2B} x + \epsilon^{2B} x^3) dx + \int_0^{n+1} (k_{yy}^{2B} y + \epsilon^{2B} y^3) dy \end{aligned}$$

(4)

转子弹性变形的势能为:

$$V_2 = \frac{1}{2} \{u\}_x^T [K_s] \{u\}_x + \frac{1}{2} \{u\}_y^T [K_s] \{u\}_y$$

(5)

其中, $[K_s]$ 为轴的刚度系数矩阵。

所以,转子的总势能 V 为:

$$V = V_1 + V_2$$

(6)

系统的动能表示为:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left\{ \frac{d}{dt} [x_i + r_i \cos(\omega t + \Phi)] \right\}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left\{ \frac{d}{dt} [y_i + r_i \sin(\omega t + \Phi)] \right\}^2$$

(7)

引入Lagrange 函数为:

$$L = T - V$$

(8)

Lagrange 运动方程可表示如下:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = F_i$$

(9)

其中, $i = 1, \cdots, n_0$ 。方程中 F_i 表示不平衡力, q_i 是通用坐标, φ 表示粘性扩散项。对本文研究的转子

而言,没有粘性扩散项,故 $\partial \varphi / \partial q_i = 0$ 。

将方程(6)、(7)代入方程(9),可得转子系统的运动方程:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \\ \vdots \\ \ddot{x}_{n+1} \\ \ddot{y}_{n+1} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{Bmatrix} = [F] \quad (10)$$

当转子为图 1 所示的支承结构时, $[F]$ 可表示为:

$$[F] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 r_2 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ m_2 r_2 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_2) \\ \vdots \\ m_n r_n \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_n) \\ m_n r_n \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_n) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$[K] = \{[D_1] + [D_2]\}^{-1} \quad (12)$$

其中: $[D_1]$ 表示由轴承变形引起的转子的柔度矩阵, $[D_2]$ 表示由轴变形引起的转子的柔度矩阵。

2 非线性系统的等效线性化

2.1 等效线性化方法

利用等效线性化方法可以等效非线性系统。为了等效非线性系统,需解出非线性系统的数值解 $\{X_{jk}(t)\}_R$, 然后假定一个等效线性系统,即假定刚度和阻尼参数,求出等效的线性响应 $\{X_{jk}(t)\}_{Eq}$ 。定义两者误差为^[6]:

$$e_{jk} = \{X_{jk}(t)\}_R - \{X_{jk}(t)\}_{Eq} \quad (13)$$

定义目标函数为:

$$U = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N e_{jk}^2 \quad (14)$$

其中:下标 j, k 分别表示在时间 T 内所选取的点数和系统的自由度。当 $U \rightarrow 0$, 非线性系统就可以用等效线性系统代替。

对于等效系统定义矢量 $\{P\}$:

$$\{P\} = (K_1, C_1, \dots, K_n, C_n)^T \quad (15)$$

此处的 $K_k, C_k (k=1, \dots, n)$ 分别为各自由度下的刚度系数和阻尼系数。

因此,对 n 自由度系统,求解步骤如下:

(1) 由方程(15)假定矢量 $\{P\}$, 并确定刚度系数和阻尼系数的上下限;

(2) 通过模态分析法求出系统的解 $\{X_{jk}(t)\}_{Eq}$, 其中含有刚度和阻尼系数等未知量;

(3) 由数值积分法求出时间 T 内的非线性响应的数值解 $\{X_{jk}(t)\}_R$;

(4) 根据方程(14), 计算 U ;

(5) 通过优化方法,求 U 取最小值时的等效线性参数 K_k, C_{k0} 。

以刚度非线性单自由度系统为例进行计算。运动方程表示为:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx + k^* x^3 = F_0 \sin \omega t \quad (16)$$

设:

$$\begin{aligned} m &= 150 \text{ g}, & F_0 &= 4\,448 \text{ N}, \\ \omega &= 30 \text{ rad/s}, & c &= 10\,000 \text{ N s/m}, \\ k &= 1\,500 \text{ N/m}, & k^* &= 1.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^3 \end{aligned}$$

初始条件:

$$x(0) = 0.015 \text{ m}, \quad \dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$$

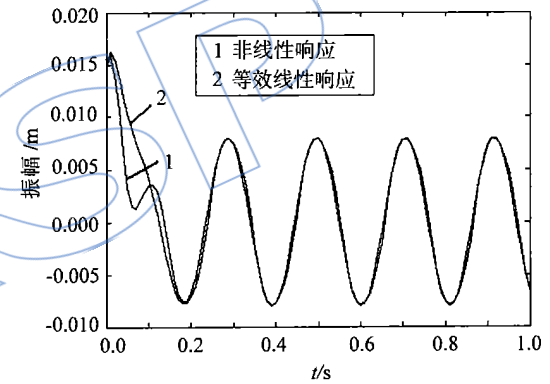


图 2 振动响应曲线图

Fig 2 The figure of vibration response

计算时间范围为 $0 \sim 1 \text{ s}$, 时间间隔 Δt 为 0.001 s 。等效线性后的刚度系数 $k_{Eq} = 5.264\,8 \times 10^5 \text{ N/m}$ 。使用 Runge-Kutta 法计算的 nonlinear 响应与等效后的线性响应如图 2 所示。由图 2 可以看出两者的响应曲线很快趋向一致,表明计算的等效刚度能够等效原来的非线性系统。

2.2 多盘转子运动方程的求解

为了求出多盘转子系统的等效的线性响应 $\{X_{jk}(t)\}_{Eq}$, 将方程(10)改写如下:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \\ \vdots \\ \ddot{x}_{n+1} \\ \ddot{y}_{n+1} \end{Bmatrix} + [K]_{Eq} \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{Bmatrix} = [F] \quad (17)$$

令:

$$x_i = \vec{X}_i e^{i\omega t} \quad , \quad y_i = \vec{Y}_i e^{i\omega t} \quad , \quad F_i = \vec{F}_i e^{i\omega t}$$

(18)

将式(18)代入式(17), 可得:

$$\begin{bmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vdots \\ \vec{X}_{n+1} \\ \vec{Y}_{n+1} \end{bmatrix} = [-\omega^2[M] + [K]_{Eq}]^{-1}[\vec{F}]$$

(19)

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = Re \left(e^{i\omega t} \begin{bmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vdots \\ \vec{X}_{n+1} \\ \vec{Y}_{n+1} \end{bmatrix} \right)$$

(20)

(20)式即为非线性支承多盘转子等效线性系统的解 $\{X_{jk}(t)\}_{Eq}$

3 非线性支承转子的动平衡方法

3.1 动平衡步骤

进行非线性支承转子动平衡时, 先按第一节的方法建立非线性运动方程, 再用第二节的方法在平衡转速下对非线性系统进行等效线性化, 求出其等效刚度, 然后用线性系统计算该转速下由不平衡力引起的响应, 最后采用影响系数法求出等效线性系统的配重量, 使等效线性系统的响应减少到可接受的水平, 用计算的平衡校正量对非线性转子进行平衡。具体步骤总结如下:

- (1) 建立非线性支承转子的运动方程;

(2) 求非线性方程的数值解;

(3) 建立等效线性系统方程组;

(4) 确定转子的平衡转速, 在平衡转速下用优化方法对非线性系统进行等效线性化, 求出等效刚度;

(5) 在平衡转速下, 用等效刚度求转子系统校正面处的振动峰值, 将其作为初始不平衡量;

(6) 在各个校正平面上施加试重, 利用等效刚度求出系统的响应, 计算转子动平衡所需的影响系数;

(7) 利用影响系数法完成转子动平衡。

3.2 计算实例

实例分析的模型为两支承外伸悬臂多盘转子, 如图 3 所示。采用向心球轴承作为支承, 支承刚度具有非线性。这种结构的模型适合多种实际转子如微型发动机转子、高速磨头转子、离心机转子等。研究这种结构形式的转子模型既有力学典型性, 又不失应用的广泛性。

假设 m_1 和 m_6 的质量为 3 kg, m_3 和 m_4 的质量为 2 kg, 轴承处 m_2 和 m_5 的质量均为 0.1 kg。 k 为 1.5×10^7 N/m。 k^* 为 1×10^{14} N/m³。 $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ 对应的平面分别记为 I, II, III, IV, V 和 VI, 平衡转速为 5 000 r/min。

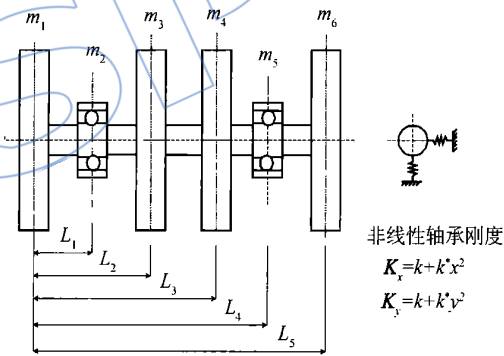


图 3 转子系统图
Fig 3 The figure of rotor system

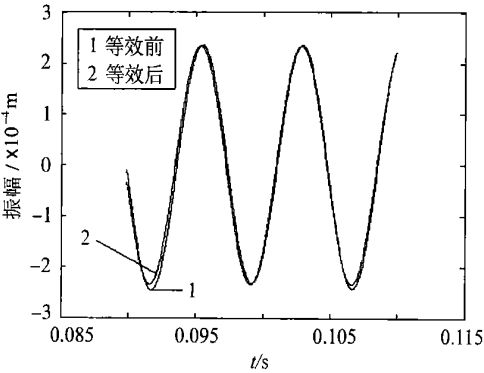


图 4 m_2 处的响应曲线
Fig 4 Vibration response of m_2

- (1) 按照本文介绍的方法, 计算该转子系统在 5 000 r/min 时的等效刚度。计算结果为:

$$(K_{xx}^{1B})_{Eq} = 2.013\ 1 \times 10^7\ \text{N/m}$$
$$(K_{yy}^{1B})_{Eq} = 2.019\ 3 \times 10^7\ \text{N/m}$$
$$(K_{xx}^{2B})_{Eq} = 2.023\ 5 \times 10^7\ \text{N/m}$$
$$(K_{yy}^{2B})_{Eq} = 2.018\ 4 \times 10^7\ \text{N/m}$$

图 4 是 m_2 处等效前后的响应曲线。

表 1 初始不平衡

Table 1 Initial unbalance

平面	大小/(kg·m)	角度/(°)
I	0.000 6	88
III	0.000 2	165
IV	0.000 2	165
VI	0.000 6	88

(2) 利用影响系数法进行转子动平衡。初始不平衡量见表 1, 初始振动值见表 2。平衡时测量点选取在 I, II, III, IV, V 和 VI, 校正平面选取在 I, III和VI。

表 2 初始振动值

Table 2 Initial value of vibration

测点	复数振幅/ 10^{-3}m	
Z10	0.138 5	0.558 4i
Z20	0.000 6	0.022 3i
Z30	- 0.100 5	- 0.342 3i
Z40	- 0.100 5	- 0.342 3i
Z50	0.000 6	0.022 3i
Z60	0.138 5	0.558 4i

表 3 平衡数据

Table 3 Balancing data

试重量 1			试重量 2			试重量 3		
平面	大小/(kg·m)	角度/(°)	平面	大小/(kg·m)	角度/(°)	平面	大小/(kg·m)	角度/(°)
I	0.000 5	0	III	0.000 5	0	VI	0.000 5	0
测点	复数振幅/ 10^{-3}m		测点	复数振幅/ 10^{-3}m		测点	复数振幅/ 10^{-3}m	
Z11	0.429 4	0.558 4i	Z12	- 0.018 5	0.558 4i	Z13	0.339 7	0.558 4i
Z21	0.017 7	0.022 3i	Z22	0.002 3	0.022 3i	Z23	0.002 1	0.022 3i
Z31	- 0.257 5	- 0.342 3i	Z32	0.017 8	- 0.342 3i	Z33	- 0.248 6	- 0.342 3i
Z41	- 0.248 6	- 0.342 3i	Z42	0.008 3	- 0.342 3i	Z43	- 0.257 5	- 0.342 3i
Z51	0.002 1	0.022 3i	Z52	- 0.000 7	0.022 3i	Z53	0.017 6	0.022 3i
Z61	0.339 7	0.558 4i	Z62	- 0.009 6	0.558 4i	Z63	0.429 1	0.558 4i

为了求得转子系统的影响系数, 分别在 I, III 和 VI 平衡面上加试重, 得到转子的响应见表 3。用最小二乘影响系数法算得 3 个校正面的配重量^[7]。计算结果见表 4。表 5 给出了平衡前后转子在一阶(5 000 r/m in)和二阶(8 000 r/m in)临界转速附近的不平衡响应。

表 4 平衡面配重

Table 4 Correction mass

平面	I	III	VI
配重/ $10^{-3}(\text{kg}\cdot\text{m})$	0.601 7	0.370 5	0.595 8
相位/(°)	268.8	344.7	265.3

表 5 平衡结果

Table 5 Result of balancing

转速/ (r/m in)	平面	初始不平衡 响应/ 10^{-3}m	平衡后响应 / 10^{-3}m
5 000	I	0.575 3	0.002 0
	III	0.356 7	0.001 3
	IV	0.356 7	0.022 5
	VI	0.575 3	0.029 0
8 000	I	0.286 6	0.007 6
	III	0.235 9	0.003 3
	IV	0.235 8	0.006 0
	VI	0.285 7	0.031 3

4 结 论

建立了非线性支承多盘转子系统动平衡的计算模型, 并运用优化方法等效非线性系统得到了等效刚度, 最后采用等效后的线性模型平衡了非线性转子。平衡结果表明采用等效线性化的方法, 能够平衡非线性支承的多盘转子系统, 平衡后转子系统的振幅得到了大幅度的降低, 平衡效果好。

参考文献

[1] 黄文虎, 武新华, 焦映厚, 等 非线性转子动力学研究综述[J]. 振动工程学报, 2000, 13(4): 497~ 509
HUANG Wen-hu, WU Xin-hua, JIAO Ying-hou, etc Review of Nonlinear Rotor Dynamics[J]. *Journal of vibration Engineering*, 2000, 13(4): 497~ 509

[2] Chen, Peter Y P. Flexible Rotor Balancing Taking Bearing Non-Linearity into Account[R]. *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference (C)*, 2001, V 6A:

683~ 689

[3] Sharan A M, Rao J S Unbalance Response of Rotor Disks Supported by Fluid Film Bearing with a Negative Cross Coupled Stiffness Using Influence Coefficient Method[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1985, 20(5): 415~ 426

[4] 胡海岩 应用非线性动力学[M]. 北京: 航空工业出版社, 2000

[5] Genta G, Repaci A. Circular Whirling and Unbalance Response of Non-Linear Rotors[J]. *Rotating Mechanical Dynamics, Rotor Dynamics Research Corporation*, 1988: 441~ 448

[6] Anand M Sharan, Arden Turpin. Solution of Non-Linear Vibration Problems Using Optimization Principles[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1994, 17(2): 101~ 110

[7] 邓旺群, 高德平. 涡轴发动机动力涡轮转子高速动平衡技术研究[J]. 航空动力学报, 2003, 18(5): 669~ 675
DENG Wang-qun, GAO De-ping. High Speed Dynamic Balance Technique of a Power Turbine Rotor of Turbine Shaft Engine[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2003, 18(5): 669 ~ 675