

文章编号: 1000-8055(2006) 01-0077-06

一维、稳态、非热平衡发汗冷却的 解析解研究

王海南, 王建华

(中国科学技术大学 热科学和能源工程系, 安徽 合肥 230027)

摘要: 为了研究热平衡假设给求解发汗冷却问题带来的误差, 同时避免非热平衡能量方程求解中边界条件提法上的争议, 对一维、稳态、非热平衡发汗冷却数学模型进行了简化。通过忽略冷却介质流体在微孔流动中的热传导作用, 得到了发汗冷却问题的解析解。利用解析解, 讨论了热平衡与非热平衡的变化趋势以及影响热平衡的关键参数, 并在此基础上, 提出一个定量的热平衡假设使用准则。通过分析多孔材料骨架温度的变化趋势, 研究了影响发汗冷却效率的因素。

关键词: 航空、航天推进系统; 发汗冷却; 多孔介质; 解析解; 热平衡准则

中图分类号: V 231. 1

文献标识码: A

Investigation on Analytical Solution of One-Dimensional, Steady, Non-Equilibrium Transpiration Cooling

WANG Hai-nan, WANG Jian-hua

(Department of Thermal Science and Energy Engineering,

University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

Abstract: To analyze the error caused by the assumption of Local Thermal Equilibrium (LTE) in the problems of transpiration cooling, and to avoid the problem involved in the reasonable presentation of the boundary conditions in solving the differential equations of the Local Thermal Non-Equilibrium (LTNE), the heat conduction of the gaseous coolant in the pores of porous media was neglected. Based on this simplification, an analytical solution of the one-dimensional LTNE model was obtained. Using the solution, the key parameters controlling the variation trend from LTNE to LTE were analyzed, and a quantitative criterion to evaluate the LTE assumption was suggested. The factors that influence the effectiveness of transpiration cooling were also discussed.

Key words: aerospace propulsion system; transpiration cooling; porous media; analytical solution; thermal equilibrium criterion

收稿日期: 2005- 08- 10; 修订日期: 2005- 11- 02

基金项目: 国家自然科学基金重大研究计划(90305006); 安徽省教育厅自然科学基金重点项目(2004kj365zd);

国家教委留学回国人员基金

作者简介: 王海南(1980-), 男, 北京人, 中国科学技术大学热科学和能源工程系硕士生, 主要从事计算流体与传热方面的研究。

符号表

y, Y	坐标
H	多孔介质板厚度
T, θ	温度
k	导热系数 $\text{W/m} \cdot \text{K}$
h_{sf}	孔内对流换热系数 $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$
a_{sf}	比面 m^{-1}
h	边界对流换热系数 $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$
ρ	密度 kg/m^3
v_f	流体速度 m/s
m	流量 $\text{kg/m}^2 \text{s}$
M	无量纲流量
Bi	孔内 Biot 数
Bi_h	热端边界 Biot 数
$k_{1,2}, K_{1,2}, C_{1,2,3}$	解析解系数
$\Delta, \Delta_{1,2,3}$	Cramer 法则确定的系数行列式

希腊字母

ϵ	孔隙率
δ	热端表面上气固相对温差

下标

s	固体骨架
f	流体
e	有效值
c	冷却介质
∞	无穷远

发汗冷却是目前航天航空领域里公认的一种高效冷却技术。其原理如图1所示:冷却介质以与热流相反的方向穿过多孔介质骨架中的微孔,在其高温表面形成一层均匀的冷却介质膜,来抵抗外部高强度热流,从而保护骨架材料免受烧蚀。

通常,在流体穿过多孔介质骨架中的微孔时,固体骨架和流体的温度是不同的,即:非热平衡。如果用数学方法来描述这种非热平衡的换热过程,需要同时求解多孔骨架固体和冷却介质流体两个相互耦合的能量平衡方程。由于这两个方程都是二阶的微分方程,因此需要给定4个边界条件才能获得确定的解^[1,2]。然而,固体骨架表面与高温热流之间的对流换热边界条件的提法在学术界一直有争议,至今尚未有一个公认的结论^[1~4],因此成为非热平衡发汗冷却理论研究中的一个难题。

近年来,许多文献[5,6]使用了热平衡假定:

认为固体骨架结构与冷却介质流体具有相同的温度,将两个二阶的偏微分方程合并为一个,从而使控制方程得到简化。这样处理的优点是不需要考虑微孔内两相的换热,仅需两个边界条件就可以求解。但是,如文献[3,7,8]所指出的:热平衡假定在迅速冷却或加热、高雷诺数、高孔隙率等条件下是不成立的。究竟在什么条件下热平衡假设是合理的,如何给出一个定量的判据,是目前汗冷却理论研究中值得研究的课题。

为了避免非热平衡能量方程边界条件提法上的困扰,同时定量讨论热平衡假设的应用范围,本文在忽略气态冷却介质在微孔流动中热传导作用的基础上^[2,9,10],利用一维、稳态、非热平衡发汗冷却数学模型的解析解,对热平衡和非热平衡的变化趋势进行了分析。目的是为发汗冷却理论研究者提供一个评估热平衡模型的参考方法和一个定量准则。

1 理论推导

1.1 控制方程及边界条件

物理模型如图1所示:冷却气体以流量 m 在储存舱温度 T_c 接近骨架材料,以与热流相反的方向进入微孔,与固体骨架组成一个反向换热器。

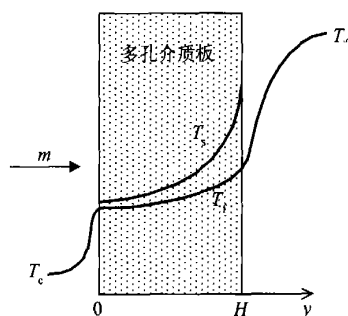


图1 冷却介质与多孔介质骨架换热

Fig. 1 Heat transfer between the coolant material and porous matrix

假设热物性变化可以忽略,根据文献[2,9,11],一维、稳态、非热平衡发汗冷却的控制方程可以分别由流体的能量方程:

$$k_{fe} \frac{d^2 T_f}{dy^2} + h_{sf} a_{sf} (T_s - T_f) = \rho_{cpl} v_f \frac{dT_f}{dy} \quad (1)$$

和固体骨架的能量方程:

$$k_{se} \frac{d^2 T_s}{dy^2} + h_{sf} a_{sf} (T_s - T_f) = 0 \quad (2)$$

来表示。其中, $k_{se} = (1 - \epsilon) k_s$, $k_{fe} = \epsilon k_f$ 。比较方程

(1)和(2)可见: 由于气体的导热系数远小于固体, 方程(2)中的气体热传导可以忽略。此时流体能量方程变为:

$$h_{sf}a_{sf}(T_s - T_f) = mc_{pf} \frac{dT_f}{dy} \tag{3}$$

其中, $m = \rho_{vf} = \text{const}$ 。这时方程(2)和(3)的求解只需要用3个边界条件。

在冷端边界上, 应用对流换热条件:

$$y = 0$$

$$h_c(T_s - T_f) = \rho_{vf}c_{pf}(T_f - T_c) \tag{4}$$

如果认为, 在边界上固体的热能损失应该等于气体的焓增量^[9], 则有:

$$y = H$$

$$h(T_\infty - T_s) = k_{se} \frac{\partial T_s}{\partial y} \tag{5}$$

在热端边界上, 也用对流换热条件:

$$y = H$$

$$h(T_\infty - T_s) = k_{se} \frac{\partial T_s}{\partial y} \tag{6}$$

引入无量纲长度和温度:

$$Y = \frac{y}{H}, \quad Y \in [0, 1]$$

$$\theta = C_1 e^{k_1 Y} + C_2 e^{k_2 Y} + C_3$$

根据边界条件(9)~(11), 可求出待定参数,

$$K_{1,2} = 1 + \frac{M}{Bi} k_{1,2}, \quad k_{1,2} = \frac{-\frac{Bi}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{Bi}{M}\right)^2 + 4Bi}}{2}, \quad C_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \tag{7}$$

(i = 1, 2, 3)

这里 Δ, Δ_i 可通过文献[12]给出的Cramer 法则, 由下面的系数矩阵确定:

$$\begin{bmatrix} K_1 St - 1 & K_2 St - 1 & St - 1 \\ M - k_1 K_1 & M - k_2 K_2 & M \\ (Bi_h + k_1) K_1 e^{k_1} & (Bi_h + k_2) K_2 e^{k_2} & Bi_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Bi_h \end{bmatrix}$$

即:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & K_2 St - 1 & St - 1 \\ 0 & M - k_2 K_2 & M \\ Bi_h & (Bi_h + k_2) K_2 e^{k_2} & Bi_h \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} K_1 St - 1 & 0 & St - 1 \\ M - k_1 K_1 & 0 & M \\ (Bi_h + k_1) K_1 e^{k_1} & Bi_h & Bi_h \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} K_1 St - 1 & K_2 St - 1 & 0 \\ M - k_1 K_1 & M - k_2 K_2 & 0 \\ (Bi_h + k_1) K_1 e^{k_1} & (Bi_h + k_2) K_2 e^{k_2} & Bi_h \end{vmatrix}$$

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_\infty - T_c}, \quad \theta \in [0, 1]$$

则控制方程(2)、(3)及边界条件(4)~(6) 化为:

$$\frac{d^2 \theta}{dY^2} - Bi(\theta - \theta_i) = 0 \tag{8}$$

$$Bi(\theta - \theta_i) = St\theta \tag{9}$$

$$Y = 0, \quad \frac{d\theta}{dY} = MSt\theta \tag{10}$$

$$Y = 0, \quad \theta_i = St\theta \tag{11}$$

$$Y = 1, \quad Bi_h(1 - \theta) = \frac{d\theta}{dY} \tag{12}$$

其中, $M = mc_{pf}/k_{se}$ 为无量纲冷却气体质量流量, 变化范围 $M \in (0, \infty)$; $Bi = h_{sf}a_{sf}H/2/k_{se}$ 为孔内气体与固体之间换热 Biot 数, 变化范围为 $Bi \in (0, \infty)$; $Bi_h = hH/k_{se}$ 为固体热端边界与外部流体之间换热 Biot 数, 相应的变化范围为 $Bi_h \in (0, \infty)$; $St = hc/mc_{pf}$ 为固体冷端边界上的 Stanton 数, 其变化范围在 $St \in [0, 1]$ 。

1.2 解析解

方程(7)和(8)是常微分方程, 其解析解的通式为:

$$\theta = K_1 C_1 e^{k_1 Y} + K_2 C_2 e^{k_2 Y} + C_3 \tag{12}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_1St - 1 & K_2St - 1 & St - 1 \\ M - k_1K_1 & M - k_2K_2 & M \\ (Bi_h + k_1)K_1e^{k_1} & (Bi_h + k_2)K_2e^{k_2} & Bi_h \end{vmatrix}$$

2 结果分析与讨论

从发汗冷却数学模型的解析解可看出: 影响温度计算结果的参数有4个 Bi , M , Bi_h , St 。其中有两个来自边界条件, 即: St 和 Bi_h 。现在定义热端边界上流体与固体的相对温差为:

$$Y = 1 \quad , \quad \delta = \frac{\theta - \theta}{\theta} \quad (13)$$

这个值的大小实际反映了使用热平衡假设将会带来的最大偏差, 因为在热端边界上, 流体和固体的温度差别最大。因此称 δ 为: 热平衡假设的最大偏差。将解析式(12) 代入(13) 可得:

$$Y = 1 \quad ,$$

$$\delta = \frac{(K_1 - 1)C_1e^{k_1} + (K_2 - 1)C_2e^{k_2}}{K_1C_1e^{k_1} + K_2C_2e^{k_2} + C_3} \quad (14)$$

2. 1 边界条件对热平衡假设偏差 δ 的影响

尽管热端边界上的Biot数 Bi_h 会影响 θ 和 θ 的计算结果, 但根据 Δ 的行列式可知, Bi_h 可以从(14)式中消去, 所以 Bi_h 对热平衡假设偏差 δ 没有影响。

由边界条件(10)可知, St 的取值范围在0到1之间。经解析解验证, 在本文所考虑的参数范围内, St 的变化对 δ 的影响小于0.1%。所以在后面的分析中, 为了简化计算, 我们可直接取 $St=1$ 。

2. 2 冷却介质流量和孔内Biot数对 δ 的影响

由式(14)可得由无量纲流量 M 及Biot数 Bi 控制的热端边界上的热平衡最大偏差 δ 的等值

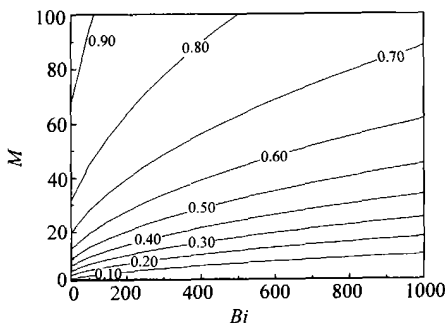


图2 流量 M 及孔内Biot数 δ 影响下的分布图

Fig.2 Distribution of δ with the variation of flow rate M and the Biot number in the pores

线分布图2。由图可见: M 与 Bi 对非热平衡程度有决定性的作用。随着冷却介质流量的减小, δ 值减小, 热平衡趋于成立; 随着Biot数的增加, 等值线下的面积增加, 趋于满足热平衡假设的区域增加; 这与文献[2, 13~16]的结论是一致的。原因是当流量较小时, 多孔介质内部的冷却介质的流速较慢, 这时流体有更充分的机会与固体骨架换热, 因而两者温度将更接近。而Biot数增大代表了微孔内两相换热的增强, 因而热平衡在大 Bi 数下趋于成立。

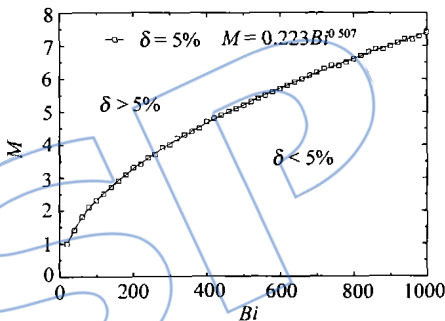


图3 由流量 M 及孔内Biot数 Bi 确定的热平衡区域

Fig.3 The LTE region determined by the dimensionless flow rate and the Biot number in the pores

如果以 $\delta < 5\%$ 为允许使用热平衡假设的定量准则, 则用方程(14)可以拟合出一条 $\delta = 5\%$ 的曲线, 如图3所示, 拟合的曲线方程为:

$$M = 0.223Bi^{0.507} \quad (15)$$

当流量 M 与Biot数的关系位于曲线下方时, 即: 满足 $\delta < 5\%$, 可以认为热平衡假设成立; 相反, 当流量与Biot数的关系位于曲线上方时, 即: $\delta > 5\%$, 热平衡假设不成立。因此我们推荐以:

$$M < 0.223Bi^{0.507} \quad (16)$$

作为满足热平衡假设成立的定量准则。

2. 3 影响骨架热端表面温度 θ 的因素

通过解析解可验证: 冷端边界上Stanton数的变化对骨架材料热端边界上温度分布 $\theta|_{y=1}$ 的影响也小于0.1%, 因此可以忽略。

图4展示了冷却介质流量 M 及孔内Biot数 Bi 对骨架热端表面温度 $\theta|_{y=1}$ 的影响。 M 较大时, $\theta|_{y=1}$ 随 Bi 增大而迅速减小; M 较小时, Bi 对 $\theta|_{y=1}$

的影响较弱。这一结果是合理的,因为在小冷却介质流量下,即使孔内的固体与流体的换热增强(即 Bi 增大),但由于此时冷却介质流量有限,所以 Bi 对冷却效果的影响仍较小。

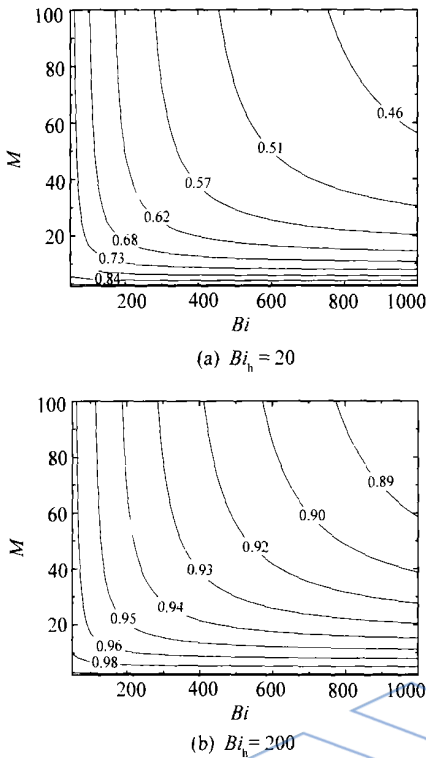


图 4 流量 M 及 $Biot$ 数 Bi 影响下的热端边界上的无量纲温度分布
Fig. 4 Temperature distribution with the variation of coolant flow rate and the Biot number in the pores

图 4(a) 和 (b) 比较了不同热端边界条件下热端边界上固体无量纲温度 $\theta|_{y=1}$ 的变化。这个变化实际上反应了热端表面冷却效率变化,因为高的 $\theta|_{y=1}$ 对应于低冷却效率。前面已指出,热端边界条件不影响 δ 值,但是由图 4 可见:热端边界条件影响最终骨架材料热端边界上的冷却效率。当 $Bi_h = 20$ 时, θ 随 M 及 Bi 的增大而迅速减小,即:冷却效率迅速提高,见图 4(a)。其原因很清楚, M 代表冷却介质流量, Bi 代表多孔介质内部固体和流体的换热充分程度,因而提高这两者将使冷却效果增强,即:固体骨架温度 θ 下降迅速。当 $Bi_h = 200$ 时, M 与 Bi 对冷却效率的影响相对减弱,见图 4(b)。这说明,当外部热流强度 Bi_h 提高时,原有条件下的发汗冷却效率将减弱。

3 结论与展望

本文通过忽略气态冷却介质在微孔内的热传

导,求出了一维、稳态、非热平衡发汗冷却数学模型的解析解。通过分析解析解的变化趋势,可以得出以下结论:

(1) 冷端边界上的 $Stanton$ 数及热端边界上的 $Biot$ 数 Bi_h 的变化不影响热平衡假设的使用。

(2) 无量纲冷却介质流量 M 及孔内 $Biot$ 数 Bi 是影响热平衡假设是否成立的关键参数。如果以热端边界上流体温度与固体温度的相对差小于 5% 作为判断热平衡假设是否合理的定量准则,则由解析解给出的热平衡准则为:

$$M < 0.223Bi^{0.507}$$

(3) 这是一个偏保守的热平衡准则,因为在微分方程的处理上,我们忽略了气体在微孔中的热传导作用。如果考虑这一项,真实热端边界上的流体温度 θ 会略高于其解析解,因此热端边界上的两相温度将更加接近。

(4) 影响发汗冷却效率的主要参数为:冷却介质流量 M , 孔内 $Biot$ 数 Bi 及热端边界上的 $Biot$ 数 Bi_h 。发汗冷却效率随 M 与 Bi 增大而提高; M 较大时,热端面上的冷却效率随 Bi 数的增大而迅速提高; M 较小时, Bi 的变化对冷却效率的影响减弱。而当 Bi_h 增大时,原有条件下的发汗冷却效率降低。

虽然本文仅考虑气态冷却介质的情况,但当液态冷却介质的导热系数远小于多孔介质固体材料的导热系数时,本文得出结论同样适用。另外,关于液体相变对冷却过程影响,将在我们下一步的研究报告中给出。

参考文献:

[1] Alazmi B, Vafai K. Constant Wall Heat Flux Boundary Conditions in Porous Media under Local Thermal Non-equilibrium Conditions[J]. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2002, 45: 3071~3087.
[2] Polezhaev Y V, Seliverstov E M. A Universal Model of Heat Transfer in Systems with Penetration Cooling[J]. *High Temperature*, 2002, 40: 856~864.
[3] Amiri A, Vafai K, Kuzay T M. Effects of Boundary Conditions on Non-Darcian Heat Transfer Through Porous Media and Experimental Comparisons[J]. *Numerical Heat Transfer*, 1995, Part A 27: 651~664.
[4] Jiang P X, Ren Z P. Numerical Investigation of Forced Convection Heat Transfer in Porous Media Using a Thermal Non-Equilibrium Model[J]. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 2001, 22: 102~110.
[5] Vafai K, Kim S J. Forced Convection in a Channel Filled with a Porous Medium: An Exact Solution[J]. *ASME J.*

Heat Transfer, 1989, 111: 1103~1106.

- [6] Quintard M, Whitaker S. Local Thermal Equilibrium for Transient Heat Conduction: Theory and Comparison with Numerical Experiments [J]. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1995, 38: 2779~2796.
- [7] Vafai K, Sozen M. Analysis of Energy and Momentum Transport for Fluid Flow Through a Porous Bed [J]. *ASME J. Heat Transfer*, 1990, 96: 690~699.
- [8] Nield D A. Effects of Local Thermal Non-Equilibrium in Steady Convective Processes in a Saturated Porous Medium: Forced Convection in a Channel [J]. *J. Porous Media*, 1998, 1: 181~186.
- [9] Burch D M, Allen R W, Peavy B A. Transient Temperature Distributions within Porous Slabs Subjected to Sudden Transpiration Heating [J]. *ASME J. Heat Transfer*, 1976, 5: 221~225.
- [10] Green L J R, Calif D. Gas Cooling of a Porous Heat Source [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1952, 6: 173~178.
- [11] Nield D A, Bejan A. Convection Heat Transfer [M]. Springer, 1999.
- [12] 陈龙玄, 钟立敏. 线性代数简明教程 [M]. 安徽 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1997.
- [13] Lee D Y, Vafai K. Analytical Characterization and Conceptual Assessment of Solid and Fluid Temperature Differentials in Porous Media [J]. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1999, 42: 423~435.
- [14] Nield D A, Kuznetsov A V. Local Thermal Non-equilibrium Effects in Forced Convection in a Porous Media Channel: A Conjugate Problem [J]. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 42: 1999, 3245~3252.
- [15] Muralidhar K, Suzuki K. Analysis of Flow and Heat Transfer in a Regenerator Mesh Using a Non-Darcy Thermally Non-equilibrium Model [J]. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2001, 44: 2493~2504.
- [16] Marafie A, Vafai K. Analysis of Non-Darcian Effects on Temperature Differentials in Porous Media [J]. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2001, 44: 4401~4411.